



# Ecole Thématique CNRS ETR2017

## « Rayonnement Thermique en Milieux Semi-Transparentes »

Laboratoire de Thermique et Energie de Nantes, 13-19 mai 2017

### Transfert radiatif aux courtes échelles

Karl Joulain  
INSTITUT P' UPR3346 Poitiers



# Transfert radiatif aux courtes échelles

Karl Joulain

19 mai 2017

## 1 Introduction

Les transferts thermiques sont très divers quant à leur origine physique. Ainsi, la conduction ou la convection de chaleur s'effectuent à travers un milieu matériel par des porteurs de chaleur qui peuvent être des particules de gaz, des électrons voire des ondes acoustiques comme des phonons. Le transfert thermique s'apparente alors à un phénomène de diffusion où la vitesse des porteurs de chaleur et leur libre parcours moyen caractérise la manière dont l'énergie thermique est transportée. Il existe, par ailleurs, un autre mode de transfert de chaleur, très différent, qui lui s'effectue par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques se propageant dans le vide ou dans un milieu semi-transparent. C'est le *rayonnement thermique*. Ce phénomène s'explique en considérant la quantification des modes électromagnétiques lorsque ceux-ci sont confinés dans un espace fini d'une part, et d'autre part en considérant la quantification en énergie de chaque mode.

De plus, le transfert par rayonnement obéit aux lois régissant l'électromagnétisme autrement dit les équations de Maxwell. Les propriétés de ce transfert thermique sont donc, a priori, ondulatoires. Cependant, dans un grand nombre de cas, le rayonnement thermique obéit à des lois simplifiées, celles de l'optique géométrique. On néglige alors l'essentiel des comportements ondulatoires de la lumière comme les interférences et l'effet tunnel. Ce domaine d'étude constitue la radiométrie. Comme nous le verrons, l'absence d'effets ondulatoires se produit quand les distances mises en jeu sont grandes devant la longueur d'onde thermique, conditions où l'on retrouve les comportements radiométriques habituels. En revanche, lorsque les distances mises en jeu sont petites devant la longueur d'onde, par exemple en approchant deux objets chauffés l'un de l'autre, nous verrons que le comportement est franchement différent de celui qui est décrit par la radiométrie.

Ce cours s'attachera dans un premier temps à rappeler les propriétés générales des ondes électromagnétiques. Il rappellera à l'aide du développement en onde plane comment la perte des termes évanescents lors de la propagation limite la résolution. Puis, un lien entre les grandeurs radiométriques et les grandeurs électromagnétique sera effectué. Dans la suite, il sera rappelé comment on établit la loi de la densité d'énergie de Planck. Puis, sera présenté en détail la théorie qui permet de calculer l'émission thermique et les transferts thermique à partir des champs électromagnétiques. Cette théorie, qui s'appuie sur le théorème de fluctuation-dissipation est l'électrodynamique fluctuationnelle. Cette théorie sera appliquée dans quelques cas simples notamment l'émission thermique d'une particule, l'émission thermique d'une surface plane puis le transfert thermique entre deux surfaces planes.

## 2 Ondes électromagnétiques

### 2.1 Equations de Maxwell

La théorie classique du rayonnement électromagnétique [1] nous enseigne que dans le cas général, c'est-à-dire en présence de matière, le champ électromagnétique est déterminé par la donnée des quatre champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ . On appelle  $\mathbf{E}$  le champ électrique,  $\mathbf{D}$  le vecteur déplacement,  $\mathbf{B}$  l'induction magnétique tandis que  $\mathbf{H}$  est le champ magnétique. Ces champs sont en interaction mutuelle entre eux ainsi qu'avec les charges  $\rho$  et les courants  $\mathbf{j}$  libres. Ces interactions sont données par les équations de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

En prenant la divergence de l'équation (4) et utilisant le fait que la divergence d'un rotationnel est nulle, on obtient l'équation de conservation de la charge électrique

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (5)$$

La force de Lorentz qui décrit l'action du champ électromagnétique sur une particule chargée se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v}$  complète la dynamique des champs et des charges.

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6)$$

Nous nous placerons dans la suite dans le cas où les grandeurs mises en jeu sont monochromatiques. Ceci est possible en raison du fait que tout signal dépendant du temps s'exprime en fonction de quantités monochromatiques par l'intermédiaire d'une transformation de Fourier. Ainsi,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (7)$$

Les permittivités  $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$  et perméabilité  $\mu(\mathbf{r}, \omega)$  permettent de relier simplement les champs monochromatiques dans le cas de milieux linéaires et isotropes. Entre le vecteur déplacement  $\mathbf{D}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$ , la relation est

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (8)$$

tandis qu'entre le champ magnétique  $\mathbf{H}$  et l'induction magnétique  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \quad (9)$$

### 2.2 Développement en ondes planes. Cohérence. Limite de Diffraction.

Dans le vide, les composantes du champ obéissent à l'équation de Helmholtz

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \psi(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (10)$$

qui admet pour solution

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + Be^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (11)$$

$\mathbf{k} = k\mathbf{u}$  est le vecteur d'onde dont le module  $k = \omega/c$ . Considérons maintenant une onde électromagnétique se propageant dans la direction des  $z$  positifs. Soit  $\psi$  une composante de ce champ. Nous allons montrer que cette composante peut s'écrire comme une somme d'ondes planes se propageant dans la direction  $z$ . Supposons que l'on connaisse ce champ  $\psi(\mathbf{r}, \omega)$  et que de plus, à une abscisse  $z$ , la composante  $\psi$  soit de carré sommable dans le plan  $(x, y)$ . En chaque abscisse  $z$ , il est possible de calculer la transformée de Fourier 2D de la composante  $\psi$

$$\psi(\alpha, \beta, z, \omega) = \int dx dy \psi(x, y, z, \omega) e^{-i(\alpha x + \beta y)} \quad (12)$$

Bien sûr,  $\psi(x, y, z, \omega)$  s'écrit grâce à la transformée de Fourier inverse.

$$\psi(x, y, z, \omega) = \int \frac{d\alpha d\beta}{4\pi^2} \psi(\alpha, \beta, z, \omega) e^{i(\alpha x + \beta y)} \quad (13)$$

A l'aide de cette dernière expression, et en utilisant l'équation de Helmholtz (10), on peut en déduire la dépendance de  $\psi(\alpha, \beta, z, \omega)$  avec  $z$ . En effet

$$\frac{\partial^2 \psi(\alpha, \beta, z, \omega)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 - \beta^2\right) \psi(\alpha, \beta, z, \omega) = 0 \quad (14)$$

qui admet pour solution

$$\psi(\alpha, \beta, z, \omega) = Ae^{i\gamma z} + Be^{-i\gamma z} \quad (15)$$

avec  $\gamma^2 = \mu\epsilon\omega^2/c^2 - \alpha^2 - \beta^2$ ,  $Im(\gamma) > 0$  et  $Re(\gamma) > 0$  si  $Im(\gamma) = 0$ . Si on ne considère que les termes se propageant vers les  $z$  positifs,

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \int \frac{d\alpha d\beta}{4\pi^2} \psi(\alpha, \beta, z=0, \omega) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \quad (16)$$

Dans cette expression,  $\psi(\alpha, \beta, z=0, \omega)$  est la transformée de Fourier bidimensionnelle dans plan  $(x, y)$  de la composante du champ  $\psi(x, y, z=0, \omega)$ .  $\psi(\mathbf{r}, \omega)$  apparaît comme une somme d'ondes planes dont les amplitudes sont les composantes de Fourier du champ dans le plan  $z=0$ . Les composantes d'ondes planes dépendent donc de la distribution spatiale du champ dans le plan  $(x, y)$  en  $z=0$ . Rappelons que le produit de la largeur d'une fonction par la largeur de sa transformée de Fourier est de l'ordre de  $2\pi$ . Si un champ a une distribution spatiale qui s'effectue sur une distance typique  $a$ , alors la distribution de ses composantes d'ondes planes d'effectuera sur une largeur  $2\pi/a$  dans l'espace des fréquences spatiales. Selon que la distribution du champ s'effectue sur une distance plus grande ou plus petite que la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement, son comportement sera très différent comme on peut l'observer sur la Fig. 1.

- si  $a \gg \lambda$ , les composantes d'ondes planes sont non nulles pour des fréquences spatiales inférieures à  $2\pi/a$  qui est donc très petit devant  $2\pi/\lambda$ . Rappelons que les vecteurs d'onde pour lesquels  $\alpha$  ou  $\beta$  sont proches de  $2\pi/\lambda$  sont des vecteurs d'onde qui ont une direction très éloignée de l'axe  $z$  puisque la composante du vecteur selon  $z$  ( $\gamma$ ) tend vers 0. Lorsqu'au contraire les composantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont petites devant  $2\pi/\lambda$ , cela veut dire que la composante selon  $z$  est prépondérante et est proche de  $2\pi/\lambda$ . Le rayonnement est très directionnel dans la direction  $z$

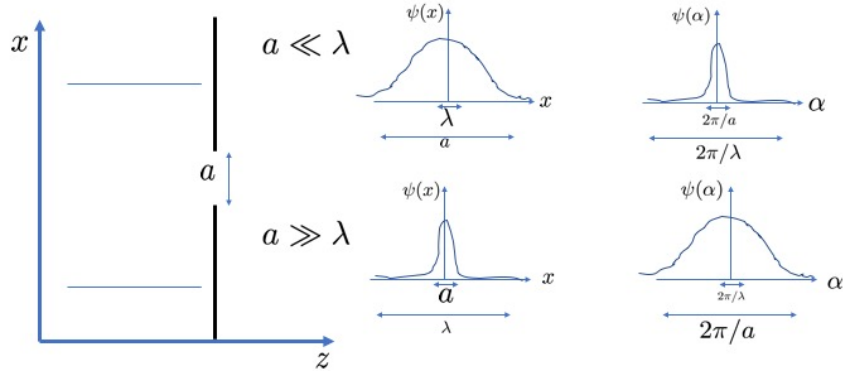


Figure 1: Répartition du champ et de sa transformée de Fourier suivant que le confinement du champ  $a$  est petit ou grand devant la longueur d'onde  $\lambda$ .

- si  $a \sim \lambda$ , les composantes d'onde planes sont nulles pour des vecteurs d'onde  $\alpha$  et  $\beta$  compris entre 0 et  $2\pi/\lambda$ . Cela veut donc dire que le développement en ondes planes comporte des contributions pour toutes les directions allant de la direction  $z$  jusqu'à des directions pratiquement orthogonales à  $z$  qui correspondent à des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  de l'ordre de  $2\pi/\lambda$ . Le rayonnement n'est plus directionnel. C'est le phénomène de diffraction pour lequel on observe des contributions dont les directions sont très éloignées de la direction  $z$ .
- Si  $a \ll \lambda$ , alors le développement en ondes planes contient des fréquences spatiales  $\alpha$  et  $\beta$  qui sont très grandes devant  $2\pi/\lambda$ . Celles qui sont plus petites que  $2\pi/\lambda$  correspondront à des ondes propagatives puisque la composante du vecteur d'onde selon  $z$ ,  $\gamma$ , sera réelle. Ce développement contiendra des contributions proches de la direction  $z$  mais aussi très éloignées de cette direction comme dans le cas précédent. Cependant, le développement en ondes planes contient de nombreuses fréquences spatiales supplémentaires qui correspondent à des fréquences spatiales comprises entre  $2\pi/\lambda$  et  $2\pi/a$ . Pour ces fréquences, la composante du vecteur d'onde  $\gamma$  est imaginaire pur. Ces contributions correspondent à des ondes évanescentes. Lorsque l'on s'éloigne du plan  $z = 0$ , elles s'atténuent exponentiellement. Les composantes de grandes fréquences spatiales issues du champ en  $z = 0$  disparaissent donc du développement dès que l'on s'éloigne de ce plan de quelques longueurs d'onde. La propagation agit comme un filtre passe-bas qui ne laisse passer que les fréquences spatiales inférieures à  $2\pi/\lambda$ . Dans le signal propagé, les fréquences spatiales élevées ne sont donc plus présentes empêchant par la même la collecte d'information correspondant à la taille sublongueur d'onde de la structure ayant confiné le champ (ici  $a$ ). C'est la limite de résolution ou limite de diffraction. Nous voyons donc que la collecte d'information sublongueur d'onde nécessite de recueillir le signal ayant les fréquences spatiales élevées, fréquences qui n'existent que dans le domaine du champ proche où les distances mises en jeu sont bien plus faibles que la longueur d'onde.

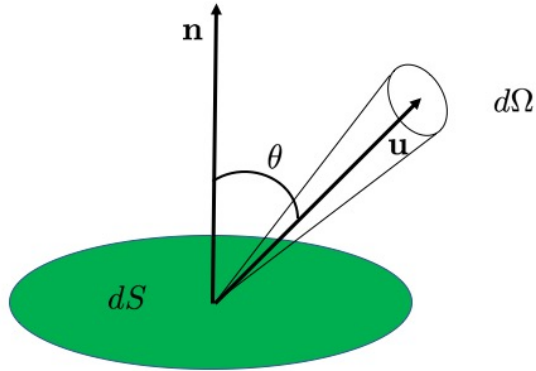


Figure 2: Emission d'une surface dans l'angle solide  $d\Omega$ .

### 2.3 Relation entre les quantités radiométriques et les grandeurs électromagnétiques. Définition statistique de la luminance

En radiométrie, on utilise principalement trois quantités : la densité d'énergie  $G$ , la densité de flux  $q$  et la luminance  $I_\omega$ .

La densité d'énergie est une quantité volumique qui correspond à la densité électromagnétique d'énergie par unité de volume. Dans le vide celle-ci s'exprime très facilement en fonction des quantités électromagnétiques

$$u = G = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{\mu_0}{2} \mathbf{H}^2 \quad (17)$$

La densité d'énergie est homogène à une énergie par unité de volume et s'exprime en  $\text{J m}^{-3}$ . C'est une quantité quadratique par rapport aux champs et qui est donc proportionnelle au carré des champs. Elle peut aussi être vue comme l'équivalent de probabilité de présence des particules électromagnétiques à savoir les photons.

La densité de flux est une puissance par unité de surface. Lorsqu'elle est intégrée sur une surface, on obtient la puissance qui a traversé cette surface. Il s'agit d'une quantité liée au transport d'énergie contrairement à la densité d'énergie. Cette quantité existe aussi dans le formalisme de l'électrodynamique classique. Il s'agit du vecteur de Poynting. C'est le produit vectoriel du champ électrique et du champ magnétique.

$$\mathbf{q} = \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (18)$$

Il s'agit là aussi d'une quantité quadratique. Elle peut être vue comme l'équivalent du courant de probabilité des particules électromagnétiques.

En radiométrie, on utilise très souvent  $I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{u})$  une quantité appelée la luminance qui correspond à une densité de flux à une position  $\mathbf{r}$  dans une direction donnée  $\mathbf{u}$  (Fig. 2). Nous allons voir que la luminance peut-être définie à partir du champ électromagnétique comme une transformée de Wigner du champ électromagnétique. Cette opération peut-être vue comme une transformée de Fourier bi-dimensionnelle de la fonction de corrélation spatiale du champ. Pour démontrer cette relation, nous

partons du développement en ondes planes du champ électrique.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{E}(\mathbf{K}, z_0) e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} e^{i\gamma(z-z_0)} \frac{d^2\mathbf{K}}{4\pi^2} \quad (19)$$

où les amplitudes d'ondes planes sont données par la transformée de Fourier bidimensionnelle dans le plan  $z = z_0$ .

$$\mathbf{E}(\mathbf{K}, z_0) = \int \mathbf{E}(\mathbf{R}_0, z_0) e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}_0} d^2\mathbf{R}_0 \quad (20)$$

Dans ces expressions,  $\mathbf{r} = (\mathbf{R}, z)$  et  $\mathbf{K} = (\mathbf{K}, \gamma)$ . Pour obtenir le flux  $\phi$ , il faut intégrer le flux du vecteur de Poynting donné pour des grandeurs monochromatiques par  $\mathbf{S}(\mathbf{r}) = 1/2\Re[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})]$  dans un plan  $z$  en se rappelant que le flux s'obtient aussi à partir de la luminance comme

$$\phi = \int I(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \cos \theta d^2\mathbf{R} d\Omega \quad (21)$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\mathbf{u}$  et la normale au plan d'intégration autrement dit la direction  $z$  ici.  $d\Omega$  est l'angle solide élémentaire autour de la direction  $\mathbf{u}$ . En utilisant un développement en ondes planes sur le champ magnétique et en se rappelant que pour les composantes d'ondes planes

$$\mathbf{H}(\mathbf{K}, z_0) = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{K}, z_0)}{\mu_0 \omega} \quad (22)$$

on trouve après quelques calculs

$$\phi = \frac{1}{2\mu_0 \omega} \Re \int \gamma |\mathbf{E}(\mathbf{K}, z_0)|^2 \frac{d^2\mathbf{K}}{4\pi^2} \quad (23)$$

Ecrivons maintenant le module au carré des composantes d'ondes planes en  $z_0$ .

$$|\mathbf{E}(\mathbf{K}, z_0)|^2 = \int \mathbf{E}(\mathbf{R}_1, z_0) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{R}_2, z_0) e^{i\mathbf{K}\cdot(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)} d^2\mathbf{R}_2 d^2\mathbf{R}_1 \quad (24)$$

Posons  $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)/2$  et  $\mathbf{R}' = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ , on obtient

$$|\mathbf{E}(\mathbf{K}, z_0)|^2 = \int \mathbf{E}(\mathbf{R} + \mathbf{R}'/2, z_0) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{R} - \mathbf{R}'/2, z_0) e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}'} d^2\mathbf{R} d^2\mathbf{R}' \quad (25)$$

En reportant dans l'expression du flux, on trouve

$$\phi = \frac{k_0^2}{8\mu_0 c \pi^2} \Re \int \cos^2 \theta \sin \theta \langle \mathbf{E}(\mathbf{R} + \mathbf{R}'/2, z_0) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{R} - \mathbf{R}'/2, z_0) \rangle e^{ik_0 \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{R}'} d^2\mathbf{R} d^2\mathbf{R}' d\theta d\varphi \quad (26)$$

ce qui permet d'identifier la luminance comme

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \frac{\epsilon_0 c}{2} \left( \frac{k_0}{2\pi} \right)^2 \cos \theta \langle \mathbf{E}(\mathbf{R} + \mathbf{R}'/2, z_0) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{R} - \mathbf{R}'/2, z_0) \rangle e^{ik_0 \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{R}'} d^2\mathbf{R}' \quad (27)$$

Ici,  $\mathbf{u}_\perp$  est un vecteur unitaire dans la direction de la projection de  $\mathbf{u}$  dans le plan perpendiculaire à  $z$ . Comme annoncé plus haut, la luminance est donc la transformée de Wigner de la fonction de corrélation du champ. De manière analogue à la discussion qui a eu lieu plus haut sur les composantes d'onde plane des champs, nous pouvons déduire des propriétés du champ le comportement de la

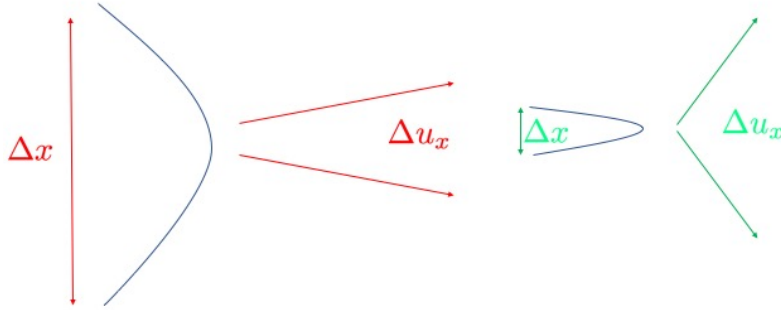


Figure 3: Illustration de la relation entre la cohérence d'une source et sa directionalité.

luminance. Ainsi, si les champs électriques sont peu corrélés spatialement, ce qui est le cas pour les sources thermique qui sont corrélées sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde, alors la transformée de Wigner de la fonction de corrélation des champs sera large, autrement dit la source sera omnidirectionnelle. A contrario, la longueur de corrélation spatiale des champs est importante, ce qui est par exemple le cas pour un laser, alors la transformée de Wigner sera piquée ce qui veut dire qu'une source avec une grande cohérence spatiale est très directionnelle. Cette relation entre la luminance et la fonction de corrélation spatiale des champ nous montre donc le lien intrinsèque entre la cohérence d'une source et sa directionalité (Fig. 3).

### 3 Rayonnement thermique à l'équilibre

Nous rappelons dans cette partie comment s'exprime le rayonnement thermique à l'équilibre. Rappelons que l'expression de ce rayonnement a sonné le glas de la physique classique à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle incapable de prédire théoriquement l'émission thermique des corps observée expérimentalement.

L'expression du rayonnement thermique est la conséquence de deux quantifications.

- La quantification des modes électromagnétique, bien prévue par la théorie classique, qui apparaît dès que l'on considère des ondes dans un espace confiné.
- La quantification des niveaux d'énergie à une fréquence donnée, issue de la théorie quantique.

Les modes électromagnétiques sont caractérisés par leur vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et leur polarisation. La polarisation d'un mode peut prendre deux valeurs différentes. Les vecteurs d'onde des ondes électromagnétiques placés dans une boîte parallélépipédique de dimension  $L_x L_y L_z$  (Fig. 4) sont quantifiés. Si l'on prend des conditions aux limites périodiques imposant qu'il y a un nombre entier de longueur d'onde dans la boîte

$$\mathbf{k} = n_x \frac{2\pi}{L_x} \mathbf{e}_x + n_y \frac{2\pi}{L_y} \mathbf{e}_y + n_z \frac{2\pi}{L_z} \mathbf{e}_z \quad (28)$$



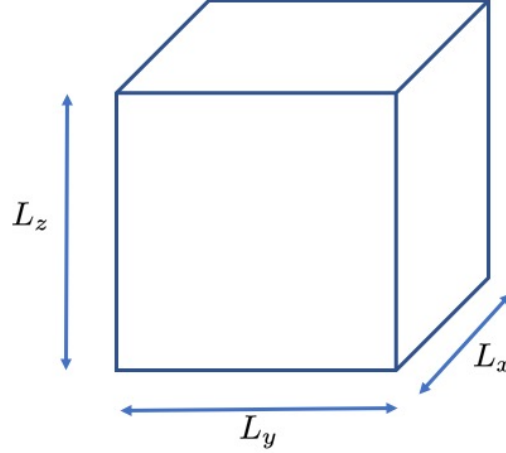


Figure 4: Boite parallélépipédique de dimensions  $L_x \times L_y \times L_z$ .

où  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$  sont les vecteurs unitaires dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  et où  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  sont des entiers relatifs. Le module du vecteur d'onde  $k$  est relié à la fréquence angulaire par l'expression  $k = \omega/c$ . Nous allons calculer le nombre de modes électromagnétiques compris entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$ , ce qui revient, compte tenu de la relation entre  $k$  et  $\omega$  à calculer le nombre de modes entre  $k$  et  $k + dk$ . Dans l'espace des  $\mathbf{k}$ , les modes  $\mathbf{k}$  autorisés sont au noeuds d'un réseau rectangulaire dont les périodes selon  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  sont respectivement  $2\pi/L_x$ ,  $2\pi/L_y$  et  $2\pi/L_z$  (Fig. 5). Lorsque l'on cherche, le nombre de modes entre  $k$  et  $k + dk$ , on cherche le nombre de noeuds du réseau rectangulaire précédent dans une coquille de rayon  $k$  et d'épaisseur  $dk$ . Si l'on remarque que le nombre de noeuds est en réalité égal au nombre de parallélépipèdes de taille  $(2\pi/L_x) \times (2\pi/L_y) \times (2\pi/L_z)$ . Ainsi, ce nombre de modes entre  $k$  et  $k + dk$  vaudra

$$dN = 2 \times \frac{4\pi k^2 dk}{\frac{2\pi}{L_x} \frac{2\pi}{L_y} \frac{2\pi}{L_z}} = V \frac{k^2 dk}{\pi} = V \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \quad (29)$$

Dans l'expression précédente, le facteur 2 provient des deux polarisations indépendantes que les modes peuvent avoir.  $V = L_x L_y L_z$  est le volume de la boîte dans laquelle nous avons considéré les ondes électromagnétiques. On exprime souvent le nombre de modes par unité de volume entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$  comme le produit de la densité d'états  $\rho(\omega)$

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (30)$$

par l'intervalle de fréquence  $d\omega$ .

Connaissant cette densité d'états, on comprend facilement que la densité d'énergie électromagnétique à l'équilibre thermique sera le produit de la densité d'état électromagnétique par l'énergie moyenne d'un mode à l'équilibre thermique [2]. Dans le cas d'un système en équilibre avec un thermostat (ensemble canonique), la probabilité d'occupation d'un mode du système d'énergie  $e$  est proportionnel à  $e^{-\beta e}$  où  $\beta = 1/k_b T$ . Si toutes les énergies sont possibles pour ce mode de 0 à l'infini, l'énergie moyenne  $\bar{e}$  sera

$$\bar{e} = \frac{\int_0^\infty e e^{-\beta e} de}{\int_0^\infty e^{-\beta e} de} = \frac{1}{\beta} = k_b T \quad (31)$$

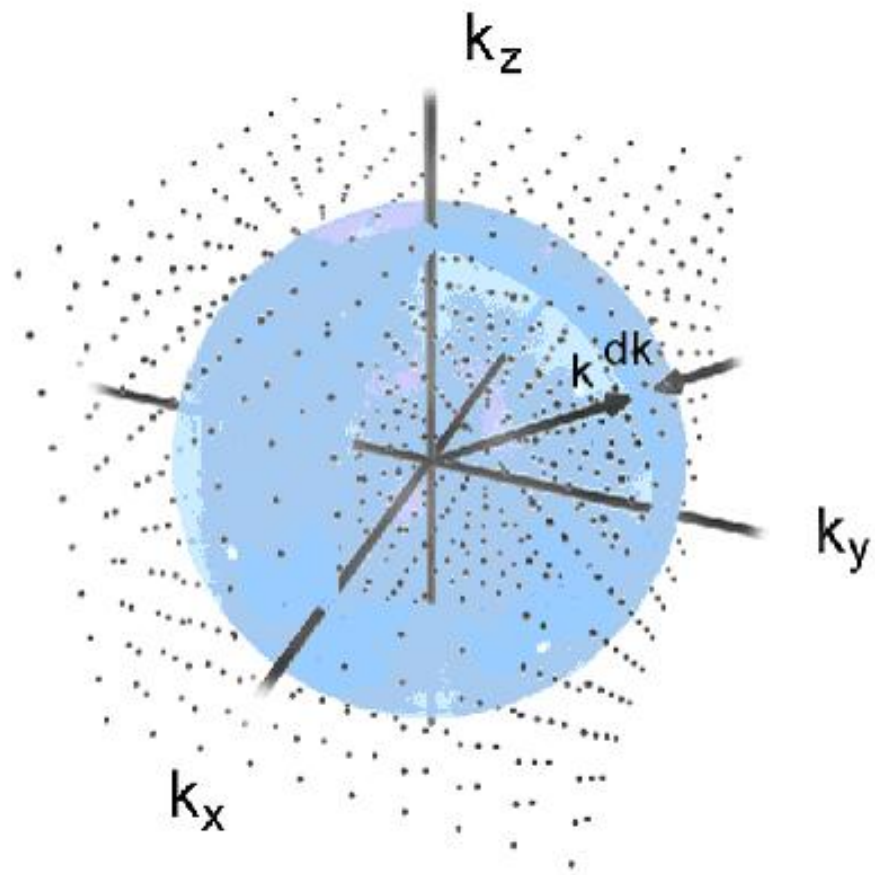


Figure 5: Vecteurs d'onde permis représentés dans l'espace des  $\mathbf{k}$

Ce résultat est celui donné par la théorie classique pour laquelle toutes les énergies dans un mode sont possibles. Cette théorie donne l'expression dite de Rayleigh-Jeans pour la densité énergie électromagnétique à l'équilibre thermique pour une température  $T$

$$u_{RJ} = \frac{k_b T \omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (32)$$

Cette formule est conforme aux observations aux faibles fréquences c'est-à-dire pour de grandes longueurs d'onde. En revanche, elle ne reproduit pas les observations aux grandes énergies, notamment dans l'ultraviolet à température ambiante. Il s'agit de ce que Paul Ehrenfest a appelé la catastrophe ultraviolette.

Pour traiter le cas des hautes fréquences, Max Planck a postulé que l'énergie d'un mode à la fréquence  $\omega$  était quantifié selon la loi

$$e(\omega) = (n + 1/2)\hbar\omega \quad (33)$$

où  $n$  est un entier naturel. Avec cette hypothèse, la somme continue pour le calcul de l'énergie du mode à la fréquence  $\omega$  devient une somme discrète

$$\bar{e} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega(n + 1/2)e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)}} \quad (34)$$

Le dénominateur de cette expression est une série géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \quad (35)$$

Le numérateur est, au signe près, la dérivée de cette dernière expression par rapport à  $\beta$ . On en déduit donc

$$\bar{e} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_b T} - 1} \quad (36)$$

Lorsque l'on multiplie cette énergie moyenne par la densité d'états, on trouve deux termes. Le premier ne dépend pas de la température. Il s'agit de l'énergie du vide dont le sens est encore très débattu. Le second terme est celui qui nous intéresse qui représente la contribution thermique à la densité d'énergie électromagnétique.

$$u(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/k_b T} - 1)} \quad (37)$$

L'intégration sur tout le spectre donne la fameuse loi en  $T^4$  pour la densité d'énergie totale.

$$u = \int_0^{\infty} u(\omega) d\omega = aT^4 \quad (38)$$

avec  $a = k_b^4 \pi^2 / (15 \hbar^3 c^3)$ .

Notons que par un raisonnement analogue, en comptant les modes se propageant dans un direction donnée, on obtient la luminance  $I_{\omega}^0(T)$  et l'exittance  $H_{\omega}^0(T) = \pi I_{\omega}^0(T)$ .

$$H_{\omega}^0(T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/k_b T} - 1)} \quad (39)$$

L'exitance totale est alors donnée par

$$H(T) = \sigma T^4 \quad (40)$$

où  $\sigma = kb^4\pi^2/(60\hbar^3c^2)$

Nous venons de voir dans cette partie que le rayonnement de corps noir est le produit de l'énergie moyenne d'un mode d'oscillateur par la densité de modes ou densité d'état. Dans le vide, la densité de mode est constante. En revanche, près d'un objet, la densité d'états est différente de celle du vide, dépend de la position considérée et peut varier drastiquement. Elle peut être plus grande que la densité d'état du vide mais elle peut également être plus faible. Pour calculer la densité d'énergie, la densité de flux voire même la luminance dans n'importe quelle situation, nous allons utiliser leur expression en fonction des champs électromagnétiques. Nous verrons ensuite comment on peut calculer ces champs à partir du formalisme de l'électrodynamique fluctuationnelle.

## 4 Electrodynamic fluctuationnelle

### 4.1 Principes de l'électrodynamique fluctuationnelle. Théorème de fluctuation dissipation

Dans cette partie, nous allons introduire les éléments et concepts nécessaires pour calculer le champ électromagnétique rayonné par un corps à l'équilibre thermique  $T$ . Les expressions obtenues seront valable à la fois dans le champ proche et le champ lointain, c'est-à-dire pour des distances mises en jeu plus grandes ou plus petites que la longueur d'onde. Comme nous l'avons déjà évoqué en introduction, la théorie phénoménologique de la radiométrie, qui est classiquement utilisée lorsqu'il s'agit de calculer les émissions et échanges radiatifs entre corps macroscopiques, utilise les approximations de l'optique géométrique. Ces approximations ne prennent pas en compte les effets ondulatoires du rayonnement comme les interférences et l'effet tunnel. Ce dernier phénomène est à la source de la contribution des ondes évanescentes au rayonnement thermique qui constitue un terme supplémentaire par rapport aux calculs radiométriques. Le formalisme qui permet de prendre en compte correctement toutes les contributions est l'électrodynamique fluctuationnelle qui a été développé par S. M. Rytov dans les années 1960 [3]. Ce formalisme est basé sur l'idée que dans tout corps à l'équilibre thermique, il existe à l'échelle microscopique une agitation thermique qui met en mouvement les constituants élémentaires de la matière, notamment des particules chargées comme les électrons dans les métaux ou bien les ions dans les cristaux polaires, comme par exemple le chlorure de sodium NaCl. Or, comme la théorie de Maxwell nous l'enseigne, des particules chargées en mouvement forment des courants fluctuants qui rayonnent un champ électromagnétique (Fig. 6). Deux ingrédients sont nécessaires pour connaître le champ électromagnétique rayonné par un corps chauffé. Il faut d'une part savoir comment les courants fluctuants sont reliés à la température et aux caractéristiques du milieu. Nous verrons dans la suite que les courants fluctuants sont donnés par le théorème de fluctuation-dissipation. D'autre part, nous devons savoir comment, dans la géométrie considérée, les courants en un lieu donné dans le système créent un champ en un autre lieu du système. Il s'agit d'un problème typique d'antenne qui nécessite de connaître le tenseur de Green du système, reliant un champ en  $\mathbf{r}$  au courant qu'il l'a créé en  $\mathbf{r}'$ .

Le théorème de fluctuation est très général dans les systèmes de hamiltonien  $H_0$  perturbés par un hamiltonien  $H_1$  de la forme

$$H_1 = -aA \quad (41)$$

et où il existe une relation linéaire entre les deux quantités  $A$  et  $a$  par l'intermédiaire d'une susceptibilité

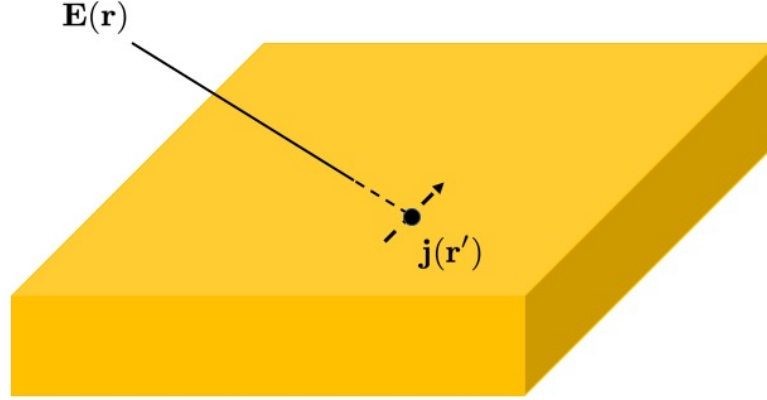


Figure 6: Emission d'un champ électrique  $\mathbf{E}$  en  $\mathbf{r}$  par un courant fluctuant  $\mathbf{j}$  en  $\mathbf{r}'$ .

$\chi$  comme par exemple

$$A(\omega) = -\chi(\omega)a(\omega) \quad (42)$$

L'exemple emblématique de ce type de problème est le mouvement Brownien où une force de Langevin fluctuante modélise la marche au hasard de macromolécules en suspension dans un liquide. On montre que la fonction de corrélation temporelle de la force est reliée à la température du liquide et à sa viscosité. De manière générale, la fonction de corrélation temporelle de la quantité  $A$  s'écrit en fonction de la partie imaginaire de la susceptibilité

$$\chi''(\omega)\hbar \coth\left[\frac{\hbar\omega}{2k_bT}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle A(0)A(\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau \quad (43)$$

Intéressons nous au cas plus général où nous considérons des champs vectoriels ayant une dépendance spatiale.  $A_k(\mathbf{r}, t)$  représente la composante  $k$  du champ  $\mathbf{A}$  en un point  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$ . Dans la suite, nous nous intéresserons à la fonction de corrélation spatio-temporelle des composantes du champ qui s'exprime  $\langle A_k(\mathbf{r}, t)A_l(\mathbf{r}', t') \rangle$ . Sa transformée de Fourier  $\mathcal{A}_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  est la densité spectrale croisée quand  $k \neq l$  et est la densité spectrale de puissance quand  $k = l$ . La densité spectrale est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation spatio temporelle qui ne dépend que de la différence entre les instants où la corrélation est prise lorsque nous avons affaire à des processus stationnaires ce qui sera le cas ici. Ainsi

$$\mathcal{A}_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle A_k(\mathbf{r}, t)A_l(\mathbf{r}', t') \rangle e^{i\omega(t-t')} d(t-t') \quad (44)$$

Dans le cas où nous avons affaire à des processus stationnaires, c'est-à-dire pour laquelle la fonction de corrélation spatio-temporelle ne dépend que de la différence entre  $t$  et  $t'$ , la fonction de corrélation des champs spatio-fréquentielle s'écrit alors en fonction de la densité spectrale croisée sous la forme

$$\langle A_k(\mathbf{r}, \omega)A_l^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle = 2\pi\delta(\omega - \omega')\mathcal{A}_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \quad (45)$$

Dans ce cas plus général, le théorème de fluctuation-dissipation s'exprime en reliant la fonction de corrélation spectrale symétrique aux pertes dans le système. La fonction de corrélation spectrale

symétrique est définie par

$$\mathcal{A}_{kl}^{(S)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{1}{2} [\mathcal{A}_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + \mathcal{A}_{lk}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega)] \quad (46)$$

Si on introduit la susceptibilité  $\chi_{kl}$  reliant la composante  $k$  de  $\mathbf{A}$  à la composante  $l$  de  $\mathbf{a}$  :  $A_k = \chi_{kl}a_l$ , on obtient pour le théorème de fluctuation-dissipation:

$$\mathcal{A}_{kl}^{(S)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \hbar \coth \frac{\hbar\omega}{2k_bT} \Im \chi_{kl} \quad (47)$$

En présence d'une densité de polarisation  $\mathbf{P}$  et d'un champ électrique  $\mathbf{E}$ , le hamiltonien de perturbation s'écrit  $H = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$ . Dans un milieu linéaire, la densité de polarisation est reliée au champ électrique par

$$P_k(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi_{kl}(\mathbf{r}, \omega) E_l(\mathbf{r}, \omega) \quad (48)$$

Notons que cette susceptibilité  $\chi_{kl}$  est relié à la permittivité relative par la relation  $\chi_{kl} = \epsilon_{kl} - 1$ . De plus, la densité de courant volumique est relié à la densité de polarisation par

$$\mathbf{j}^e(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega)}{\partial t} = -i\omega \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega). \quad (49)$$

On en déduit la fonction de corrélation spatio-temporelles pour les courants électriques

$$\langle j_k^e(\mathbf{r}, \omega) j_l^{e*}(\mathbf{r}', \omega') \rangle = \hbar \omega^2 \coth \left( \frac{\hbar\omega}{k_bT} \right) \Im [\epsilon_0 \epsilon_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)] 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (50)$$

Notons que l'on peut remplacer  $\Im [\epsilon_0 \epsilon_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)]$  par  $\Im [\epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega)] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  lorsque le milieu est local.

Nous venons de voir que les courants ou la polarisabilité sont reliés au champ électrique par la permittivité ou par la susceptibilité électrique. Nous allons voir maintenant que les courants électriques comme les courants magnétiques génèrent un champ électromagnétique. Ces derniers s'expriment en fonction des courants par l'intermédiaire des tenseurs de Green électromagnétiques du système. Il existe 4 différents tenseurs de Green qui relient les champs électriques et magnétiques aux courants électriques et magnétiques.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int d^3 \mathbf{r}' i\omega \mu_0 \mu(\mathbf{r}') \mathbf{G}^{\leftrightarrow Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{j}^e(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (51)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{G}^{\leftrightarrow He}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{j}^e(\mathbf{r}') \quad (52)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{G}^{\leftrightarrow Em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{j}^m(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (53)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \int d^3 \mathbf{r}' i\omega \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}') \mathbf{G}^{\leftrightarrow Hm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{j}^m(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (54)$$

Les tenseurs de Green décrivent comment un champ est propagé à partir d'une source émettrice vers un récepteur. Ils contiennent l'information décrivant la géométrie du système notamment la répartition spatiale des fonctions de réponse optique  $\epsilon(\mathbf{r})$  et  $\mu(\mathbf{r})$ . Ces tenseurs de Green sont reliés entre eux par les relations suivantes si bien que la donnée de  $\mathbf{G}^{\leftrightarrow Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  est suffisante pour décrire complètement le problème.

$$\mathbf{G}^{\leftrightarrow He}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{\mu(\mathbf{r})}{\mu(\mathbf{r}')} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}^{\leftrightarrow Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \quad (55)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^{Em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = [\nabla_{\mathbf{r}'} \times^T \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^{Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)]^T \quad (56)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^{Hm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{c^2 \nabla_{\mathbf{r}}}{\epsilon(\mathbf{r}') \mu(\mathbf{r}) \omega^2} \times [\nabla_{\mathbf{r}'} \times^T \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^{Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)]^T \quad (57)$$

$T$  désigne la transposée d'un opérateur. Le tenseur de Green est bien connu dans le vide. Lorsque des corps sont présents, le tenseur de Green s'exprime en fonction de la répartition spatiale des matériaux.

Le tenseur de Green peut être vu aussi comme une susceptibilité reliant le champ électrique au courant. On peut donc écrire la fonction de corrélation spectrale pour les champs électriques

$$\mathcal{E}_{kl}^{(S)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \mu_0 \hbar \omega^2 \coth\left(\frac{\hbar \omega}{k_b T}\right) \Im[G_{kl}^{Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)] \quad (58)$$

et pour les champs magnétiques

$$\mathcal{H}_{kl}^{(S)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \epsilon_0 \hbar \omega^2 \coth\left(\frac{\hbar \omega}{k_b T}\right) \Im[G_{kl}^{Hm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)] \quad (59)$$

Notons que jusqu'ici, les quantités spectrales ont des contributions pour les fréquences ou pulsations positives et négatives. Or, les quantités spectrales auxquelles nous allons nous intéresser comme la densité spectrale d'énergie ou la densité spectrale de flux sont en pratique définies uniquement pour les fréquences positives. Ainsi, l'exitance dont nous avons parlé plus haut est définie pour les fréquences positives dont l'intégration donne l'exitance totale  $\sigma T^4$ . De plus, les quantités mesurées comme par exemple le champ électrique en un lieu donné en fonction du temps sont des quantités réelles. Leur transformée de Fourier est paire à symétrie hermitienne c'est-à-dire que la contribution du signal à la fréquence  $\omega$  est égale au conjugué de la contribution du signal à la fréquence  $-\omega$ . Pour les quantités quadratiques auxquelles nous allons être confronté, on peut montrer que

$$\langle E_k(\mathbf{r}, t + \tau) E_l(\mathbf{r}', t) \rangle = \Re \left[ \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega\tau} \mathcal{E}_{kl}^{(N)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \right] \quad (60)$$

où

$$\mathcal{E}_{kl}^{(N)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = 4\omega \mu_0 \Im[G_{kl}^{Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)] \Theta(\omega, T) \quad (61)$$

est le fonction de corrélation spectrale "ordonnée" et où

$$\Theta(\omega, T) = \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / k_b T} - 1} \quad (62)$$

est l'énergie moyenne d'un oscillateur à l'équilibre thermique. On remarque donc que pour revenir aux fonctions de corrélations spectrale pour les fréquences positives, il faut multiplier les résultats obtenus à l'aide du théorème de fluctuation-dissipation par 2 et remplacer  $\frac{\hbar \omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar \omega}{k_b T}\right)$  par  $\Theta(\omega, T)$ .

## 4.2 Emission thermique d'une particule

Nous allons, dans cette partie, calculer l'émission thermique d'une nanoparticule dipolaire. Nous allons dans un premier temps rappeler comment on calcule le rayonnement d'un dipôle oscillant. Nous en déduirons l'émission thermique de la nanoparticule en considérant des dipôles dont l'amplitude et la fonction de corrélation sont données par le théorème de fluctuation-dissipation.

### 4.2.1 Rayonnement d'un dipôle

Nous calculons dans cette partie le champ électromagnétique créé en  $\mathbf{r}$  par un dipôle électrique monochromatique dans le vide situé à l'origine  $O$ . Le vecteur densité de polarisation  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  ou densité de dipôle s'exprime :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t} \delta(\mathbf{r}) \quad (63)$$

La densité de courant est la dérivée temporelle de la densité de dipôle par  $\mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t$  si bien que  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -i\omega \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t} \delta(\mathbf{r})$ . Posons  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$ . Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$  s'obtient à partir de l'expression bien connue des potentiels retardés

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (64)$$

qui dans le cas d'un dipôle dans le vide situé à l'origine donne

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{-i\omega \mu_0 \mathbf{p}_0 e^{ikr}}{4\pi r} \quad (65)$$

où  $k_0 = \omega/c$ . De l'expression du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  et de la propriété du gradient  $\nabla \times f \mathbf{A} = f \nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}$ , on obtient l'expression de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{-i\mu_0 \omega}{4\pi} e^{ik_0 r} \left( \frac{ik_0}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{u}_r \times \mathbf{p}_0 \quad (66)$$

Dans le vide, l'équation de Maxwell-Ampère permet d'exprimer le champ électrique à partir de l'induction magnétique:

$$\mathbf{E} = \frac{c^2}{-i\omega} \nabla \times \mathbf{B}$$

En utilisant  $\nabla \times (\mathbf{u}_r \times \mathbf{p}_0) = -(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r / r - \mathbf{p}_0 / r$  et  $\mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_r \times \mathbf{p}_0) = (\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r - \mathbf{p}_0$ , le champ électrique se réexprime

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_0 r}}{4\pi \epsilon_0} \left[ \left( -\frac{k_0^2}{r} - \frac{ik_0}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_r \times \mathbf{p}_0) + 2\mathbf{u}_r (\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{u}_r) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik_0}{r^2} \right) \right] \quad (67)$$

ou encore

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{k_0^3 e^{ik_0 r}}{4\pi \epsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{k_0 r} + \frac{i}{(k_0 r)^2} - \frac{1}{(k_0 r)^3} \right) \mathbf{p}_0 + \mathbf{u}_r (\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{u}_r) \left( \frac{3}{(k_0 r)^3} - \frac{3i}{(k_0 r)^2} - \frac{1}{k_0 r} \right) \right] \quad (68)$$

Ce champ électrique peut se réécrire comme un produit d'un tenseur d'ordre 2 (matrice)  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0$  par le vecteur  $\mathbf{p}_0$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}_0 \quad (69)$$

avec

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}) = \frac{k_0^3 e^{ik_0 r}}{4\pi \epsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{k_0 r} + \frac{i}{(k_0 r)^2} - \frac{1}{(k_0 r)^3} \right) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + (\mathbf{u}_r \otimes \mathbf{u}_r) \left( \frac{3}{(k_0 r)^3} - \frac{3i}{(k_0 r)^2} - \frac{1}{k_0 r} \right) \right] \quad (70)$$

où  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}$  est l'identité et  $(\mathbf{u}_r \otimes \mathbf{u}_r)$  le produit tensoriel de  $\mathbf{u}_r$  avec lui-même.



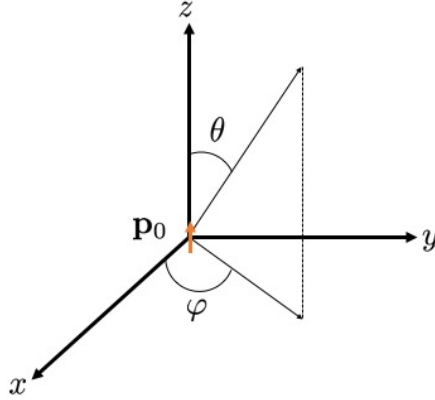


Figure 7: Dipôle vertical placé en l'origine qui rayonne un champ dans l'espace.

Comme exemple, prenons  $\mathbf{p}_0 = p_0 \mathbf{z}$  et plaçons nous en coordonnées sphériques  $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\phi$  (Fig. 7). Dans ces conditions  $\mathbf{u}_r \times \mathbf{p}_0 = -p_0 \sin \theta \mathbf{u}_\phi$  et  $\mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_r \times \mathbf{p}_0) = p_0 \sin \theta \mathbf{u}_\theta$ .  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  s'écrivent

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{i\mu_0\omega p_0 \sin \theta e^{ik_0 r}}{4\pi} \left( \frac{ik_0}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{u}_\phi \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{p_0 \sin \theta e^{ik_0 r}}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{k_0^2}{r} - \frac{ik_0}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \mathbf{u}_\theta \\ &+ \frac{2p_0 \cos \theta e^{ik_0 r}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik_0}{r^2} \right) \mathbf{u}_r \end{aligned} \quad (72)$$

Deux régimes sont observés. Un premier régime, à courte distance pour lequel  $r \ll \lambda$  i.e  $k_0 r \ll 2\pi$  où les expressions des champs se simplifient comme

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{-i\mu_0\omega p_0 \sin \theta}{4\pi r^2} \mathbf{u}_\phi \quad (73)$$

et

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{u}_r + \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{u}_\theta \quad (74)$$

On reconnaît dans cette dernière formule l'expression du champ électrique électrostatique.

L'autre régime important qui va retenir notre attention ici est le régime de champ lointain pour lequel  $r \gg \lambda$ . On obtient alors pour les champs

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{-\mu_0\omega^2 e^{ik_0 r} p_0 \sin \theta}{4\pi r c} \mathbf{u}_\phi \quad (75)$$

et

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-p_0\omega^2 e^{ik_0 r} \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \mathbf{u}_\theta \quad (76)$$

On voit que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  varient en  $1/r$  en champ lointain, sont orthogonaux et en phase. De plus on a  $|E|/|B| = c$ . Ainsi, loin du dipôle en un point  $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ , le champ électromagnétique se comporte comme une onde plane se propageant dans la direction  $\mathbf{u}_r$ . La direction de l'onde plane et la structure du champ dépendant du point d'observation, on dit que le champ électromagnétique a une structure *locale* d'onde plane.

On peut calculer la puissance rayonnée par le dipôle en calculant le flux du vecteur de Poynting à travers une sphère de rayon infini. À une distance infinie du dipôle, on ne prend que les termes de l'approximation grande distance dans le vecteur de Poynting  $\mathbf{S} = 1/(2\mu_0)Re(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*)$ . Celui-ci est orienté dans la direction  $\mathbf{u}_r$ :

$$\mathbf{S} = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \mathbf{u}_r \quad (77)$$

Cette expression nous redonne le diagramme de rayonnement du dipôle. Ainsi, l'émission est maximale dans la direction perpendiculaire au dipôle et nulle dans la direction du dipôle. La puissance totale s'obtient après intégrale du flux sur tous les angles solides

$$P = \int \mathbf{S} \cdot r^2 d\Omega = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad (78)$$

#### 4.2.2 Calcul de l'émission thermique d'une particule

Ici, nous calculerons le rayonnement thermique d'une particule dipolaire dans tout l'espace. Nous nous placerons dans l'approximation dipolaire. Pour que cela soit justifié à température ambiante où la longueur d'onde thermique est de l'ordre d'une dizaine de microns, nous prenons une particule dont la taille caractéristique est inférieure au  $\mu\text{m}$ . Dans ces conditions, le champ électromagnétique est constant dans la particule. Cette nanoparticule sera caractérisée par une polarisabilité  $\alpha(\omega)$  reliant le moment dipolaire électrique  $\mathbf{p}$  au champ électrique  $\mathbf{E}$  par  $\mathbf{p}(\omega) = \epsilon_0 \alpha(\omega) \mathbf{E}(\omega)$ . Le théorème de fluctuation-dissipation nous apprend que les fluctuations de moment dipolaire sont reliées à la partie imaginaire de la polarisabilité et à la température  $T$

$$\langle p_i(\omega) p_j^*(\omega') \rangle = \frac{8\pi}{\omega} \epsilon_0 Im(\alpha(\omega)) \Theta(\omega, T) \delta_{ij} \delta(\omega - \omega') \quad (79)$$

Connaissant la puissance rayonnée par un dipôle élémentaire oscillant à la fréquence  $\omega$  (Eq.78), nous allons calculer la puissance  $P(\omega)$  rayonnée par la particule sur un intervalle de fréquence  $d\omega$ , la puissance totale rayonnée étant donnée par  $P = \int_0^\infty P(\omega) d\omega$ . Dans le cas présent, le dipôle est donné par

$$\mathbf{p}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{p}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Si on calcule le rayonnement dans une bande de fréquence  $d\omega$ , il suffit de reprendre l'expression pour un dipôle monochromatique et de remplacer  $p_0$  par  $p(\omega)d\omega/(2\pi)$  et  $\delta(\omega - \omega')$  par  $1/d\omega$ . Notons que les dipôles thermiques étant aléatoires, il faudra ajouter les contributions des trois directions de polarisation  $|p_i|^2$   $i = x, y, z$ . D'où

$$P(\omega)d\omega = \frac{\omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \times 3 \langle |p_x(\omega)|^2 \rangle \left( \frac{d\omega}{2\pi} \right)^2 = \frac{\omega^3}{2\pi^2 c^3} Im[\alpha(\omega)] \Theta(\omega, T) d\omega \quad (80)$$

La puissance rayonnée dans l'espace est proportionnelle à la partie imaginaire de la polarisabilité qui est liée à la section efficace d'absorption de la particule.



Figure 8: Système plan-parallèle semi-infini constitué d'un matériau semi-infini et du vide.

### 4.3 Emission thermique d'une surface

Dans cette partie, nous étudions le champ électromagnétique au-dessus d'une interface plane qui sépare un demi-espace à température  $T$  contenant un matériau de permittivité  $\epsilon$  (milieu 2) du vide (milieu 1) comme décrit sur la Fig. 8. Plus précisément, nous allons considérer deux quantités que sont la densité d'énergie électromagnétique et le vecteur de Poynting. La densité d'énergie nécessite la connaissance de  $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle$  et  $\langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle$  que nous pouvons exprimer en fonction des tenseurs de Green introduit précédemment. Par exemple, la valeur moyenne du produit scalaire du champ électrique vaut

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle = \left\langle \mu_0^2 \omega \omega' \int \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^{Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega) d^3 \mathbf{r}' \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^{Ee*}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'', \omega') \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'', \omega') d^3 \mathbf{r}'' \right\rangle \quad (81)$$

Appliquons le théorème de fluctuation dissipation qui nous donne la valeur moyenne spectrale de la fonction de corrélation des courants (50) mais en nous plaçant dans le cas où on ne considère que les fréquences positives

$$\langle j_m(\mathbf{r}', \omega) j_l^*(\mathbf{r}'', \omega') \rangle = 4\pi \epsilon_0 \text{Im}(\epsilon) \omega \Theta(\omega, T) \delta_{ml} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \delta(\omega - \omega') \quad (82)$$

qui donne en la reportant dans l'équation (81)

$$\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle = 4\pi \mu_0^2 \omega^3 \epsilon_0 \Theta(\omega, T) \sum_{m,l=x,y,z} \int \text{Im}(\epsilon''(\mathbf{r}', \omega)) |G_{ml}^{Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 d^3 \mathbf{r}' \quad (83)$$

L'intégration sur  $\mathbf{r}'$  se fait en principe sur l'espace entier. Cependant, le demi-plan supérieur étant occupé par le vide, la partie imaginaire de la permittivité y est nulle et l'intégration se limite donc au demi-espace inférieur. Pour aller plus loin dans le calcul, nous avons besoin des tenseurs de Green. Il est pratique de prendre une expression sous forme de développement en onde plane, particulièrement bien adaptée à cette géométrie plan-parallèle. Plaçons nous dans le cas de matériaux diélectriques

non magnétiques où les courants sont dans le demi-plan inférieur alors que l'on considère les champs au-dessus de l'interface [4].

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^{Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{8\pi^2} \int \frac{1}{\gamma_2} (\hat{s}t_{21}^s \hat{s} + \hat{p}_1^+ t t_{21}^p \hat{p}_2^+) e^{i\mathbf{K}\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{R}')} e^{i(\gamma_1 z - \gamma_2 z')} d^2 K \quad (84)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^{He}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-k_0}{8\pi^2} \int \frac{1}{\gamma_2} (-\hat{p}_1^+ t t_{21}^s \hat{s} + \hat{s}t_{21}^p \hat{p}_2^+) e^{i\mathbf{K}\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{R}')} e^{i(\gamma_1 z - \gamma_2 z')} d^2 K \quad (85)$$

Ici  $\mathbf{r} = (\mathbf{R}, z)$ , le vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (\mathbf{K}, \gamma)$ ,  $\gamma_i = \epsilon_i k_0^2 - K^2$ ,  $\mathbf{K} = K \hat{K}$ ,  $\hat{s} = (\hat{K}) \times (\hat{z})$ ,  $\hat{p}_i^\pm = (|K|(\hat{z}) \mp \gamma \hat{K}) / (n_i k_0)$ ,  $t_{21}^s = 2\gamma_2 / (\gamma_1 + \gamma_2)$ ,  $t_{21}^p = 2n_1 n_2 \gamma_2 / (\epsilon_1 \gamma_2 + \epsilon_2 \gamma_1)$  sont les facteurs de transmission de Fresnel en polarisation  $s$  ou  $p$ .

Passons à l'intégration sur l'espace  $\mathbf{r}'$  :  $\int_{z < 0} Im(\epsilon) |G_{ml}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 d^3 \mathbf{r}'$ . Nous reportons d'abord les expressions des tenseurs de Green précédentes dans celle de la fonction de corrélation du champ

$$\begin{aligned} \int_{z < 0} Im(\epsilon) |G_{ml}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 d^3 \mathbf{r}' &= \frac{1}{64\pi^4} \int_{-\infty}^0 dz' \int d^2 \mathbf{R}' d^2 \mathbf{K} d^2 \mathbf{K}' \frac{e^{i(\mathbf{K}-\mathbf{K}')\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{R}')}}{\gamma_2(\mathbf{K})\gamma_2^*(\mathbf{K}')} e^{iz(\gamma_1(\mathbf{K})-\gamma_1^*(\mathbf{K}'))} e^{iz'(\gamma_2^*(\mathbf{K}')-\gamma_2(\mathbf{K}))} \\ &\times [(\hat{e}_m \cdot \hat{s})t_{21}^s(\hat{s} \cdot \hat{e}_l) + (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^+)t_{21}^p(\hat{p}_2^+ \cdot \hat{e}_l)] [(\hat{e}_m \cdot \hat{s})t_{21}^{s*}(\hat{s} \cdot \hat{e}_l) + (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^{+*})t_{21}^{p*}(\hat{p}_2^{+*} \cdot \hat{e}_l)] \end{aligned} \quad (86)$$

L'intégration sur  $d^2 \mathbf{R}'$  donne une distribution de Dirac égale à  $\delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}')$ . L'intégration sur  $\mathbf{K}'$  devient donc immédiate et disparaît en remplaçant  $\mathbf{K}'$  par  $\mathbf{K}$ . L'intégration sur  $z'$  est elle aussi très simple lorsque la constante diélectrique est uniforme dans le matériau. Elle se limite à l'intégration de  $e^{-2Im(\gamma_2 z')}$  entre  $-\infty$  et 0. De plus, dans un milieu absorbant :  $\omega^2/c^2 \epsilon'' = 2Re(\gamma_2)Im(\gamma_2)$ . Le module au carré du champ électrique s'écrit finalement

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle &= \frac{\mu_0 \omega \Theta(\omega, T)}{4\pi^3} \int d^2 \mathbf{K} \frac{Re(\gamma_2)}{|\gamma_2|^2} e^{-2Im(\gamma_1)z} \\ &\times [(\hat{e}_m \cdot \hat{s})t_{21}^s(\hat{s} \cdot \hat{e}_l) + (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^+)t_{21}^p(\hat{p}_2^+ \cdot \hat{e}_l)] [(\hat{e}_m \cdot \hat{s})t_{21}^{s*}(\hat{s} \cdot \hat{e}_l) + (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^{+*})t_{21}^{p*}(\hat{p}_2^{+*} \cdot \hat{e}_l)] \end{aligned} \quad (87)$$

Il reste à calculer tous les termes de la deuxième ligne de l'intégrale. Après regroupement de tous les termes, on peut noter que les termes croisés faisant intervenir des produits de coefficients de Fresnel de polarisation différentes s'annulent. D'où

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle &= \frac{\mu_0 \omega \Theta(\omega, T)}{2\pi^2} \int_0^\infty K dK \frac{Re(\gamma_2)}{|\gamma_2|^2} e^{-2Im(\gamma_1)z} \\ &\times \left[ |t_{21}^s|^2 + \frac{|t_{21}^p|^2 (K^2 + |\gamma_1|^2)(K^2 + |\gamma_2|^2)}{|n_1|^2 |n_2|^2 k_0^4} \right] \end{aligned} \quad (88)$$

À l'aide des relations suivantes

$$Re(\gamma_1)(1 - |r_{12}^s|^2) + 2Im(\gamma_1)Im(r_{12}^s) = Re(\gamma_2) \frac{|\gamma_1|^2}{|\gamma_2|^2} |t_{21}^s|^2 \quad (89)$$

$$Re(\epsilon_1^* \gamma_1)(1 - |r_{12}^s|^2) + 2Im(\epsilon_1^* \gamma_1)Im(r_{12}^s) = Re(\epsilon_2^* \gamma_2) \frac{|n_1|^2 |\gamma_1|^2}{|n_2|^2 |\gamma_2|^2} |t_{21}^s|^2 \quad (90)$$

$$Re(\epsilon_1^* \gamma_1) = Re(\gamma_1) \frac{|\gamma_1|^2 + K^2}{k_0^2} \quad (91)$$

$$Im(\epsilon_1^* \gamma_1) = Im(\gamma_1) \frac{K^2 - |\gamma_1|^2}{k_0^2} \quad (92)$$

on obtient l'expression pour le module au carré du champ électrique

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle &= \frac{\mu_0 \omega \Theta(\omega, T)}{2\pi^2} \int_0^{\omega/c} \frac{K dK}{\gamma_1} \left( \frac{1 - |r_{12}^s|^2}{2} + \frac{1 - |r_{12}^p|^2}{2} \right) \\ &+ \frac{\mu_0 \Theta(\omega, T) \omega}{2\pi^2} \int_{\omega/c}^{\infty} \frac{2K dK}{|\gamma_1|} \left[ \text{Im}(r_{12}^s) + \text{Im}(r_{12}^p) \left( \frac{2K^2}{k_0^2} - 1 \right) \right] e^{-2|\gamma_1|z} \quad (93) \end{aligned}$$

On obtient la densité d'énergie électrique en multipliant l'équation précédente par  $\epsilon_0/2$ . On peut calculer de manière analogue le module au carré du champ magnétique. Si on multiplie par  $\mu_0/2$  et qu'on l'ajoute au terme de densité d'énergie électrique, on obtient la densité d'énergie électromagnétique

$$\begin{aligned} u(\omega, T) &= \frac{\Theta(\omega, T) \omega}{2\pi^2 c^2} \int_0^{\omega/c} \frac{K dK}{\gamma_1} \left( \frac{1 - |r_{12}^s|^2}{2} + \frac{1 - |r_{12}^p|^2}{2} \right) \\ &+ \frac{\Theta(\omega, T) \omega}{2\pi^2 c^2} \int_{\omega/c}^{\infty} \frac{K^3 dK}{k_0^2 |\gamma_1|} [\text{Im}(r_{12}^s) + \text{Im}(r_{12}^p)] e^{-2|\gamma_1|z} \quad (94) \end{aligned}$$

Cette expression est la somme de deux termes. Le premier terme est une intégration sur les vecteurs d'onde parallèles compris entre 0 et  $\omega/c$ , autrement dit des vecteurs d'onde correspondant à une onde propagative dans le vide. Un second terme est une intégration sur des vecteurs d'onde parallèle supérieurs à  $\omega/c$  qui correspondent à des ondes s'atténuant exponentiellement que l'on appellent aussi des ondes évanescentes. Comme ces ondes s'atténuent exponentiellement lorsque l'on s'éloigne de l'interface, on s'attend à ce qu'elles ne contribuent pas lorsque les distances mises en jeu seront plus grande que la longueur d'onde. En présence d'un absorbeur parfait, c'est-à-dire un matériau pour lequel les facteurs de réflexion de Fresnel  $r_{12}^s$  et  $r_{12}^p$  valent 0, on trouve une densité d'énergie égale à la moitié de celle que l'on trouve dans une enceinte à l'équilibre thermodynamique. C'est normal étant donné que seul la moitié de l'espace émet du rayonnement thermique et donc qu'il manque le rayonnement issu du demi-plan supérieur.

Sur la Fig. 9 est représentée la densité d'énergie électromagnétique à différentes distances d'un demi-espace rempli de SiC à la température  $T = 300$  K. Ce matériau est polaire et supporte des polaritons de surface. À une distance bien plus grande que la longueur d'onde thermique, qui à température ambiante a une valeur autour de  $10 \mu\text{m}$ , les ondes évanescentes ne contribuent pas à la densité d'énergie. On remarque que la courbe de la densité d'énergie est très proche de celle d'un corps noir hormis sur une zone spectrale où il est bien connu que le carbure de silicium est très réfléchissant. Lorsque la distance à l'interface diminue, on remarque l'émergence d'un pic à une fréquence se situant dans la partie du spectre où le carbure de silicium est réfléchissant en champ lointain. Lorsque la distance à l'interface est très petite devant la longueur d'onde thermique, la densité d'énergie est dominée par la contribution des ondes évanescentes. Dans le cas du SiC, la densité d'énergie présente un pic à la fréquence à laquelle se trouve la résonance de surface. La courbe de la densité d'énergie est alors très différente de celle d'un corps noir par deux aspects. D'une part, l'amplitude de la densité d'énergie est bien plus importante en champ proche qu'en champ lointain. D'autre part, cette densité d'énergie présente un pic bien plus étroit que l'émission classique d'un corps noir qui est large bande.

Cette résonance est due à la présence d'ondes de surface (polaritons) près de l'interface qui décroissent perpendiculairement à celle-ci lorsqu'on s'en éloigne. Les polaritons de surfaces sont des ondes électromagnétiques qui physiquement sont associées à une oscillation collective dans le matériau. Dans le cas d'un métal, les polaritons de surface sont associées à une oscillation collective d'électrons. On parle de plasmon polaritons de surface. Ces résonances se produisent dans le domaine des longueurs

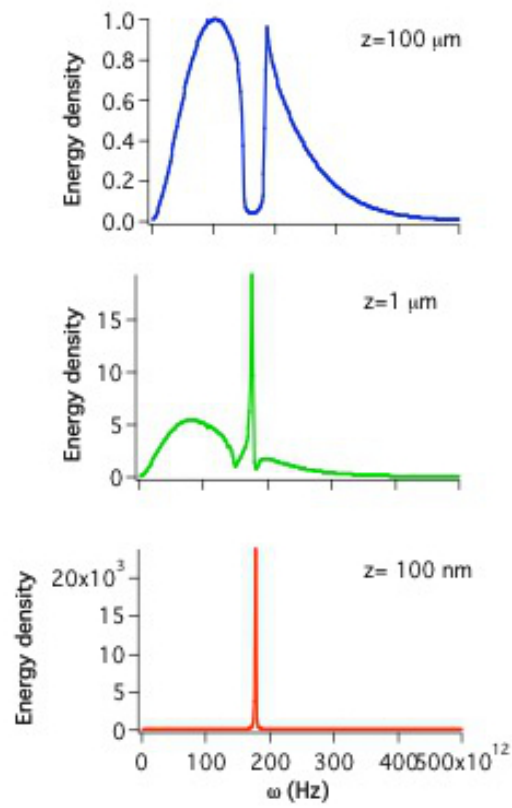


Figure 9: Densité d'énergie pour trois hauteurs différentes au-dessus d'une interface séparant un milieu semi-infini de SiC à température  $T = 300$  K.

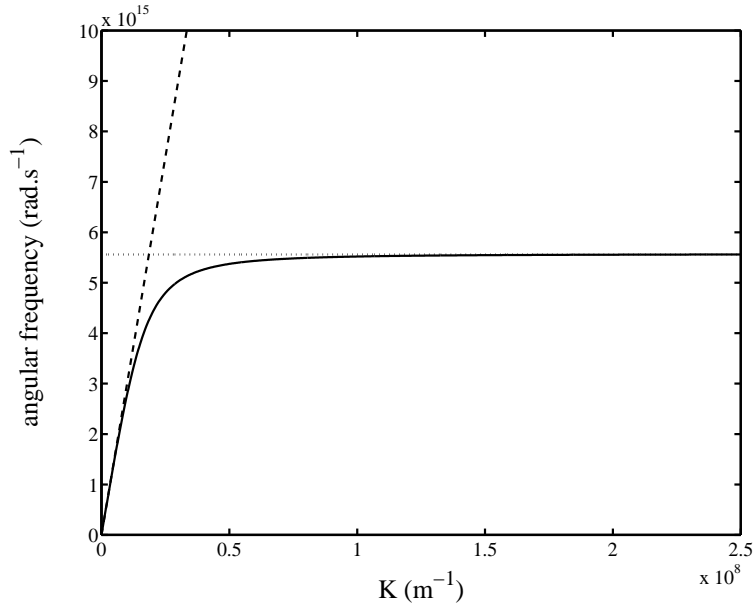


Figure 10: Relation de dispersion des ondes de surface se propageant le long d'une interface séparant le vide d'un matériau polaire. Le relation de dispersion est située sous le cône de lumière (pointillés) montrant ainsi le caractère évanescent des ondes de surface.

d'onde visibles. Dans le cas d'un matériau diélectrique polaire, les ondes de surface sont associées à une oscillation collective de phonons optiques. On parle de phonon polaritons. D'un point de vue électromagnétique ces ondes n'existent qu'en polarisation  $p$ . Leur relation de dispersion reliant leur vecteur d'onde parallèle à l'interface à la pulsation  $\omega$  s'écrit

$$K = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon + 1}} \quad (95)$$

Une condition nécessaire à leur existence est que la constante diélectrique soit inférieure à -1. Sur la Fig.10 est représentée la relation de dispersion d'une onde de surface. Notons que le module de  $K$  est toujours supérieur à  $\omega/c$ . Ceci implique que les ondes de surface sont des ondes évanescentes et qu'elles auront un rôle négligeable loin de l'interface. Observons également la présence d'une asymptote à une certaine pulsation correspondant à  $Re[\epsilon(\omega)] = -1$ . Pour des fréquences légèrement inférieures à cette fréquence critique, on voit qu'il existe un grand nombre d'ondes de surface pour un intervalle  $d\omega$ . Ceci implique que la densité d'états des ondes de surface sera importante près de la fréquence de résonance. La densité d'énergie étant le produit de la densité d'état par l'énergie moyenne d'un état, il est prévisible que les pics de la densité d'énergie correspondent aux pics de la densité d'états c'est-à-dire aux asymptotes des relations de dispersion des ondes de surface. Ces pics correspondent aussi aux résonances de  $Im(r_{12}^p)$ . En effet  $Im(r_{12}^p) = 2Im(\epsilon)/|\epsilon + 1|^2$  présente un pic lorsque la constante diélectrique approche -1 et que sa partie imaginaire n'est pas trop importante. Notons que d'un point de vue pratique la détection locale de la densité d'énergie au-dessus d'une surface permet de mesurer la densité d'état électromagnétique locale [2, 5]. En effet, la densité d'énergie électromagnétique peut toujours être vue comme le produit de l'énergie moyenne contenue dans un mode par la densité de mode. Si on divise la densité d'énergie électromagnétique à l'équilibre thermique par l'énergie moyenne

contenue dans un mode à l'équilibre thermique ( $\Theta(\omega, T)$ ), on obtient la densité locale d'états.

Intéressons nous maintenant au flux radiatif émis par un espace semi-infini à température  $T$ . Au lieu de calculer la densité d'énergie, il nous faut calculer la moyenne d'ensemble du vecteur de Poynting. Dans le cas d'un système plan semi-infini dans lequel l'interface est perpendiculaire à la direction  $z$ , on peut se limiter à calculer  $\langle S_z(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 1/2 \text{Re}[\langle E_x H_y^* - E_y H_x^* \rangle]$ . On montre de manière analogue au calcul sur la densité d'énergie, que cette quantité s'exprime

$$\langle S_z(\mathbf{r}, \omega) \rangle = \frac{\hbar\omega}{4\pi^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_b T)} - 1} \int_0^{\omega/c} K dK (1 - |r_{12}^s|^2 + 1 - |r_{12}^p|^2) \quad (96)$$

Ici, seules les ondes propagatives contribuent à l'expression du flux radiatif. Ceci n'est pas étonnant car il n'y a pas d'ondes provenant des  $z$  positifs. De plus, on montre que si il y a une symétrie de révolution autour de la direction perpendiculaire à l'interface  $K dK = d\Omega \cos\theta/(2\pi)$ , d'où

$$\langle S_z(\mathbf{r}, \omega) \rangle = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_b T)} - 1} \int_{\Omega=2\pi} \frac{\cos\theta d\Omega}{2\pi} (1 - |r_{12}^s|^2 + 1 - |r_{12}^p|^2) \quad (97)$$

On retrouve dans le cas d'un corps noir, que le flux émis est bien égal à  $\pi I_\omega^0(T)$ . Dans les autres cas, nous remarquons que l'expression du flux prend la même forme qu'en théorie classique.

$$q(\omega) = \langle S_z(\mathbf{r}, \omega) \rangle = \int d\omega \varepsilon'_\omega(\theta) L_\omega^0(T) \cos\theta d\Omega \quad (98)$$

à condition d'identifier l'émissivité  $\varepsilon'_\omega(\theta) = (1 - |r_{12}^s|^2 + 1 - |r_{12}^p|^2)/2$ . On observe donc que pour une interface plane, il existe une expression pour l'émissivité directement issue des coefficients de réflexion de Fresnel donnés par la théorie électromagnétique.

#### 4.4 Transfert thermique entre deux plans

Dans cette partie nous calculons le transfert thermique radiatif entre deux espaces semi-infinis séparés par une distance  $d$  et respectivement chauffés à des températures  $T_1$  et  $T_2$ . La géométrie du problème est celle qui est dépeinte sur la Fig.11. Les permittivités électriques  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  et les perméabilités magnétiques  $\mu_1$  et  $\mu_2$  caractérisent d'un point de vue électromagnétique les milieux 1 et 2. Le milieu 3 est le vide. Le transfert radiatif entre les deux milieux est caractérisé par la densité de flux radiatif qui s'exprime en  $\text{W m}^{-2}$ . Rappelons que la radiométrie nous enseigne que le transfert par rayonnement s'écrit

$$q(\omega) = \int_0^{2\pi} \cos\theta d\Omega \int_0^\infty d\omega \frac{\varepsilon'_{1\omega} \varepsilon'_{2\omega}}{1 - \rho'_{1\omega} \rho'_{2\omega}} \times [L_\omega^0(T_1) - L_\omega^0(T_2)] \quad (99)$$

où les  $\varepsilon'_{i\omega}$  sont les émissivités directionnelles et les  $\rho'_{i\omega}$  sont les réflectivités directionnelles.

Pour effectuer un calcul complet, il convient de calculer encore une fois la moyenne d'ensemble du vecteur de Poynting. Le principe du calcul est le même qu'auparavant mis à part que les fonctions de Green du système ont changé. Le flux s'écrit en effet [6, 7, 8]

$$q(\omega) = \langle S_z(d^+, T_1) \rangle - \langle S_z(0^-, T_2) \rangle \quad (100)$$

où  $S_z(d^+, T_1)$  est la composante verticale du vecteur de Poynting prise en  $z = d^+$  et due aux courants fluctuants dans le milieu 1. De même  $S_z(0^-, T_2)$  est la composante du vecteur de Poynting prise en  $z = 0^-$  et due aux courants fluctuants dans le milieu 2. Pour faire le calcul on a donc besoin des





Figure 11: Deux matériaux semi-infinis (1 et 2) séparés par un milieu 3 (vide) de distance  $d$ .

tenseurs de Green qui relient les courants dans le milieu 1 aux champs dans le milieu 2. Ces tenseurs de Green sont données pour le premier d'entre eux

$$\mathbf{G}^{\leftrightarrow Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{i}{8\pi^2} \int \frac{d^2\mathbf{K}}{\gamma_2} (\hat{s}t_{21}^s \hat{s} + \hat{p}_1^+ t t_{21}^p \hat{p}_2^+) e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')} e^{i\gamma_1(z-d)} e^{-i\gamma_2 z'} \quad (101)$$

et pour les autres, en utilisant les relations entre les tenseurs de Green.

$$\mathbf{G}^{\leftrightarrow He}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = -\frac{n_1 \mu_2 \omega}{8\pi^2 \mu_1 c} \int \frac{d^2\mathbf{K}}{\gamma_2} (-\hat{p}_1^+ t t_{21}^s \hat{s} + \hat{s}t_{21}^p \hat{p}_2^+) e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')} e^{i\gamma_1(z-d)} e^{-i\gamma_2 z'} \quad (102)$$

$$\mathbf{G}^{\leftrightarrow Em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{n_2 \omega}{8\pi^2 c} \int \frac{d^2\mathbf{K}}{\gamma_2} (\hat{s}t_{21}^s \hat{p}_2^+ - \hat{p}_1^+ t t_{21}^p \hat{s}) e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')} e^{i\gamma_1(z-d)} e^{-i\gamma_2 z'} \quad (103)$$

$$\mathbf{G}^{\leftrightarrow Hm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{in_1 n_2}{8\pi^2 c^2 \epsilon_2 \mu_1} \int \frac{d^2\mathbf{K}}{\gamma_2} (\hat{s}t_{21}^p \hat{s} + \hat{p}_1^+ t t_{21}^s \hat{p}_2^+) e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')} e^{i\gamma_1(z-d)} e^{-i\gamma_2 z'} \quad (104)$$

où

$$t_{12}^{s,p} = \frac{t_{13}^{s,p} t_{32}^{s,p} e^{i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^{s,p} r_{32}^{s,p} e^{2i\gamma_3 d}} \quad (105)$$

On note que le tenseur de Green à deux interfaces est le même que le tenseur de Green à une interface mise à part que l'on a remplacé le coefficient de transmission à une interface par un coefficient de transmission à deux interfaces qui prend en compte les multiréflexions. La densité de flux désirée s'exprime comme la somme de deux termes  $q(\omega) = q^{prop}(\omega) + q^{evan}(\omega)$ . Le premier terme  $q^{prop}(\omega)$  est la contribution des ondes propagatives, l'intégration sur les  $K$  étant limitée aux nombres d'ondes parallèles à l'interface inférieurs à  $\omega/c$ .

$$q^{prop}(\omega) = \frac{\Theta(\omega, T_1) - \Theta(\omega, T_2)}{4\pi^2} \sum_{i=s,p} \int_0^{\omega/c} K dK \frac{(1 - |r_{31}^i|^2)(1 - |r_{32}^i|^2)}{|1 - r_{31}^i r_{32}^i e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (106)$$

$1 - |r_{31}^{s,p}|^2$  et  $1 - |r_{32}^{s,p}|^2$  sont les facteurs de transmission en énergie entre les milieux 3 et 1 et les milieux 3 et 2 pour les polarisation  $s$  ou  $p$ . Comme on l'a vu précédemment, ces coefficients de

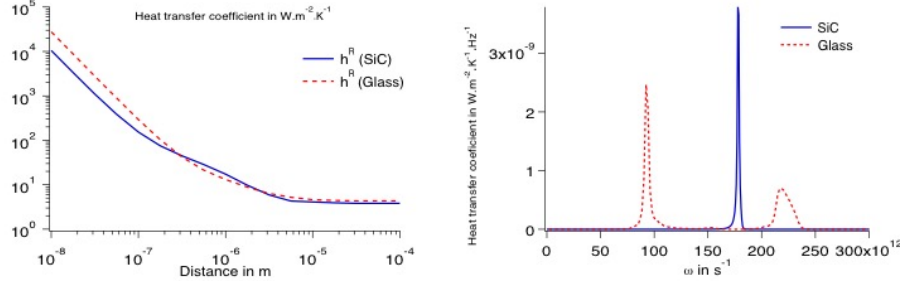


Figure 12: Coefficient de transfert radiatif pour différentes distances de séparation des milieux semi-infinis de température  $T = 300$  K (gauche). Coefficient de transfert monochromatique pour une distance  $d = 10$ nm et une température  $T = 300$  K (droite).

transmission peuvent s'identifier à une émissivité. L'expression du flux pour les ondes propagatives et l'expression classique du flux radiatif entre deux matériaux semi-infinis sont très analogues même si leurs dénominateurs semblent différents. Remarquons néanmoins que l'expression du flux comporte une intégrale sur les fréquences. La variation de  $e^{i\gamma_3 d}$  avec  $\omega$  est beaucoup plus rapide que celle des facteurs de Fresnel. On effectue ainsi une moyenne de  $|1 - r_{31}^i r_{32}^i e^{2i\gamma_3 d}|^2$  lorsqu'on intègre. Cette moyenne est égale à  $1 - |r_{31}^i|^2 |r_{32}^i|^2$ . En identifiant la réflectivité avec le module au carré du facteur de réflexion de Fresnel, on montre que l'expression du transfert radiatif classique entre les milieux 1 et 2 est égale à la contribution des ondes propagatives à ce transfert.

Le second terme de l'expression du flux s'écrit

$$q^{evan}(\omega) = \frac{\Theta(\omega, T_1) - \Theta(\omega, T_2)}{4\pi^2} \sum_{i=s,p} \int_{\omega/c}^{\infty} K dK \frac{4Im(r_{31}^i)Im(r_{32}^i)}{|1 - r_{31}^i r_{32}^i e^{2i\gamma_3 d}|^2} e^{-2|\gamma_3|d} \quad (107)$$

qui représente la contribution des ondes évanescentes car l'intégration sur les nombres d'ondes parallèle va au-delà de  $\omega/c$ . Celle-ci n'est pas nulle en présence de deux interfaces à cause de l'existence d'ondes montantes et descendantes dans la cavité. Lorsque la distance est faible, ce terme va devenir de plus en plus important, comme le suggère l'exponentielle  $e^{-2Im(\gamma_3)d}$  dans l'expression. Lorsqu'on utilise des matériaux supportant des ondes de surfaces, les ondes évanescentes se propageant le long de chaque interface peuvent interagir. Un transfert supplémentaire (par effet tunnel) a lieu.

Définissons un coefficient de transfert radiatif comme la limite du quotient du flux radiatif par la différence de température entre les milieux lorsque celle-ci tend vers 0:

$$h^R(\omega) = \lim_{(T_1 - T_2) \rightarrow 0} \frac{q(\omega)}{T_1 - T_2} \quad (108)$$

Sur le Fig. 12 est représenté  $h^R(\omega)$  en fonction de la distance entre deux milieux semi-infinis de verre ou de SiC. Pour une distance supérieure à la longueur d'onde du rayonnement thermique c'est-à-dire

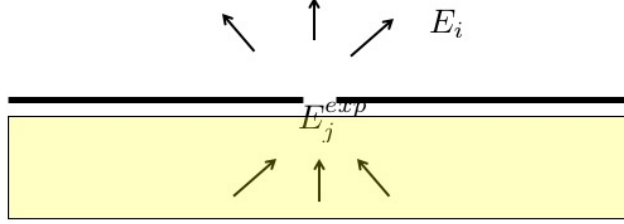


Figure 13: Champ thermique expérimental transmis à travers une ouverture située juste au-dessus d'un plan chauffé semi-infini.

pour  $d > 10\mu\text{m}$ , le transfert ne dépend pas de la distance. À des distances plus courtes, le transfert augmente comme  $1/d^2$ . Pour une distance de 10 nm, le coefficient de transfert a augmenté de 4 ordres de grandeurs par rapport à sa valeur en champ lointain. Si on regarde pour une distance de 10 nm la dépendance de  $h^R(\omega)$  avec la fréquence (Fig. 12), on observe que le transfert est important en champ proche aux fréquences correspondant aux ondes de surface. Le transfert thermique est donc pratiquement monochromatique en champ proche dû à la présence des ondes de surface comme indiqué précédemment. Une expression asymptotique du coefficient de transfert peut-être trouvée

$$h^R(\omega) = \frac{1}{d^2} \frac{\text{Im}(\epsilon_1)\text{Im}(\epsilon_2)}{|1 + \epsilon_1|^2|1 + \epsilon_2|^2} \times k_b \left( \frac{\hbar\omega}{k_b T} \right)^2 \frac{e^{\hbar\omega/(k_b T)}}{(e^{\hbar\omega/(k_b T)} - 1)^2} \quad (109)$$

Cette expression explique la dépendance en  $1/d^2$  du coefficient de transfert ainsi que sa forte dépendance en fréquence. En effet, en présence d'ondes de surface, en particulier lorsque la constante diélectrique approche -1, on trouve que le coefficient de transfert radiatif présente un pic, tout comme le facteur de réflexion de Fresnel.

#### 4.5 Emission thermique d'un trou sublongueur d'onde

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'émission thermique d'une ouverture située au-dessus d'un corps chauffé [9]. Nous allons voir que l'ouverture peut modifier de manière importante le flux thermique émis. La situation est celle dépeinte sur la Fig. 13. Un milieu semi-infini rempli d'un matériau est chauffé à une température  $T$ . On place au-dessus de ce milieu un écran percé d'un trou. On appelle  $\mathbf{E}^{exp}$  le champ expérimental situé au-dessus du milieu semi-infini en l'absence d'écran. Le champ situé au-dessus du trou est le champ  $\mathbf{E}$ . Le champ au-dessus de l'écran s'écrit en fonction du champ en l'absence d'écran à l'aide d'une fonction de transmission  $\tau(\mathbf{K}, \mathbf{K}')$  qui note la probabilité de transmission d'une onde plane de vecteur d'onde parallèle  $\mathbf{K}'$  en une onde plane de vecteur d'onde

parallèle  $\mathbf{K}$ .

$$E_i(\mathbf{K}, z_0) = \int \tau_{ij}(\mathbf{K}, \mathbf{K}') E_j^{exp}(\mathbf{K}', z_0) \frac{d^2 \mathbf{K}'}{4\pi^2} \quad (110)$$

Le flux émis peut s'exprimer en utilisant l'expression (23)

$$\phi(\omega, T) = \frac{\Theta(\omega, T)}{32\pi^5} \int d^2 \mathbf{K} d^2 \mathbf{K}' \gamma(\mathbf{K}) \frac{\Re[\gamma_2(\mathbf{K}')] }{|\gamma_2(\mathbf{K}')|^2} e^{-2\Im[\gamma_1(\mathbf{K})]z_0} \tau_{ij}(\mathbf{K}, \mathbf{K}') \tau_{ik}^*(\mathbf{K}, \mathbf{K}') \left( M_{jk}^s(\mathbf{K}') + M_{jk}^p(\mathbf{K}') \right) \quad (111)$$

où

$$M^s(\mathbf{K}) = \frac{|t_{21}^s|^2}{K^2} \begin{pmatrix} K_x^2 & -K_x K_y & 0 \\ -K_x K_y & K_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (112)$$

et

$$M^p(\mathbf{K}) = |t_{21}^p|^2 \frac{|\gamma_2|^2 + K^2}{|n_2|^2 |n_1|^2 k_0^4 K^2} \begin{pmatrix} |\gamma|^2 K_x^2 & |\gamma|^2 K_x K_y & -\gamma K_x K^2 \\ |\gamma|^2 K_x K_y & |\gamma|^2 K_y^2 & -\gamma K_y K^2 \\ -\gamma^* K_x K^2 & -\gamma^* K_y K^2 & K^4 \end{pmatrix}. \quad (113)$$

En se rappelant l'expression radiométrique du flux

$$\phi(\omega, T) = \varepsilon \frac{\Theta(\omega, T) \omega^2}{4\pi^2 c^2} S \quad (114)$$

où  $\varepsilon$  est l'émissivité de l'ouverture, on peut définir une émissivité effective pour l'ouverture

$$\varepsilon_{eff} = \frac{1}{8\pi^3 k_0^2 S} \int d^2 \mathbf{K} d^2 \mathbf{K}' \gamma(\mathbf{K}) \frac{\Re[\gamma_2(\mathbf{K}')] }{|\gamma_2(\mathbf{K}')|^2} e^{-2\Im[\gamma_1(\mathbf{K})]z_0} \tau_{ij}(\mathbf{K}, \mathbf{K}') \tau_{ik}^*(\mathbf{K}, \mathbf{K}') \left[ M_{jk}^s(\mathbf{K}') + M_{jk}^p(\mathbf{K}') \right] \quad (115)$$

A titre d'exemple, nous pouvons considérer le cas du rayonnement de corps noir à température  $T$  dans le vide à travers une ouverture dans un écran opaque. Dans le modèle général que nous venons de décrire, cela revient à dire que les coefficients de transmission  $t^s$  et  $t^p$  sont égaux à 1. Le rayonnement thermique issu de l'ouverture peut être calculé analytiquement dans deux cas asymptotiques. Le premier cas correspond à une ouverture avec un rayon  $r_0$  plus grande que la longueur d'onde thermique. Sous cette hypothèse, nous pouvons utiliser l'approximation de Kirchhoff dans lequel le champ dans l'ouverture est égal au champ incident et est nul en dehors de l'ouverture. La limite de validité de la loi de Kirchhoff est telle que  $k_0 r_0 \sim 6$  ce qui correspond à une ouverture dont le rayon est de l'ordre de la longueur d'onde. Dans ces conditions, la matrice de transmission  $\tau$  se réduit à un scalaire de telle manière que  $\tau_{ij}(\mathbf{K}, \mathbf{K}') = \delta_{ij} T(\mathbf{K} - \mathbf{K}')$  où

$$T(\mathbf{K}) = \int T(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} d^2 \mathbf{R} \quad (116)$$

et  $T(\mathbf{R}) = 1$  à l'intérieur d'un cercle de rayon  $r_0$  (l'ouverture) et  $T(\mathbf{R}) = 0$  à l'extérieur. Le calcul donne

$$T(\mathbf{K}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} R e^{-iKR \cos \varphi} dR = 2\pi \int_0^{r_0} R J_0(KR) dR = \pi r_0^2 \left( \frac{2J_1(r_0 K)}{r_0 K} \right). \quad (117)$$

Reportons l'expression de la matrice de transmission reduite à sa partie scalaire dans l'Eq. (111) ce qui permet d'obtenir le flux rayonné.

$$\phi(\omega, T) = \frac{\Theta(\omega, T)}{16\pi^5} \int \frac{\gamma(\mathbf{K})}{\gamma(\mathbf{K}')} T(\mathbf{R}') T(\mathbf{R}'') e^{-i(\mathbf{K}-\mathbf{K}')\cdot\mathbf{R}'} e^{i(\mathbf{K}-\mathbf{K}')\cdot\mathbf{R}''} d^2 \mathbf{K} d^2 \mathbf{K}' d^2 \mathbf{R}' d^2 \mathbf{R}'' \quad (118)$$

On peut faire le changement de variable  $\mathbf{m} = (\mathbf{R}' + \mathbf{R}'')/2$  et  $\mathbf{d} = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$ , qui conduit à

$$\phi(\omega, T) = \frac{\Theta(\omega, T)}{16\pi^5} \int \frac{\gamma(\mathbf{K})}{\gamma(\mathbf{K}')} T(\mathbf{m} + \mathbf{d}/2) T(\mathbf{m} - \mathbf{d}/2) e^{-i(\mathbf{K}-\mathbf{K}') \cdot \mathbf{d}} d^2 \mathbf{K} d^2 \mathbf{K}' d^2 \mathbf{m} d^2 \mathbf{d} . \quad (119)$$

Comme le produit  $T(\mathbf{m} + \mathbf{d}/2)T(\mathbf{m} - \mathbf{d}/2)$  est indépendant de la variable  $\mathbf{m}$ , l'intégration sur  $\mathbf{m}$  donne

$$\int T(\mathbf{m} + \mathbf{d}/2)T(\mathbf{m} - \mathbf{d}/2)d\mathbf{m} = \pi r_0^2 W(d) = \pi r_0^2 \times \frac{2}{\pi} \left[ \arccos \frac{d}{2r_0} - \frac{d}{2r_0} \sqrt{1 - \left( \frac{d}{2r_0} \right)^2} \right] . \quad (120)$$

En introduisant les coordonnées sphériques et les angles  $\theta$  et  $\varphi$ , on écrit  $\mathbf{k} = (\mathbf{K}, \gamma) = k_0(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  pour reformuler l'intégrale

$$\phi(\omega, T) = \frac{\Theta(\omega, T)}{16\pi^5} \pi r_0^2 k_0^4 \int \cos^2 \theta \sin \theta e^{-ik_0 d \sin \theta \cos \varphi} \sin \theta' e^{ik_0 d \sin \theta' \cos \varphi'} W(d) d\theta d\varphi d\theta' d\varphi' d^2 \mathbf{d} \quad (121)$$

qui après intégration sur les angles azimutaux donne

$$\phi(\omega, T) = \frac{\Theta(\omega, T)}{16\pi^5} \pi r_0^2 k_0^4 4\pi^2 \int \cos^2 \theta \sin \theta J_0(k_0 d \sin \theta) \sin \theta' J_0(k_0 d \sin \theta') W(d) d\theta d\theta' d^2 \mathbf{d} . \quad (122)$$

L'intégration sur  $\theta$  et  $\theta'$ , sachant que  $\mathbf{d}$  est un disque de rayon  $2r_0$ , donne

$$\begin{aligned} \phi(\omega, T) &= \frac{\Theta(\omega, T) k_0^2}{4\pi^2} \pi r_0^2 2 \int_0^{2k_0 r_0} W(u/k_0) \sin u F(u) du \\ &= \phi^0(\omega) \int_0^{2k_0 r_0} W(u/k_0) 2 \sin u F(u) du \\ &= \phi^0(\omega) \varepsilon_{vac}^{eff}(\omega) \end{aligned} \quad (123)$$

où  $F(u) = (\sin u - u \cos u)/u^3$ . Cette dernière expression définit l'émissivité effective  $\varepsilon_{vac}^{eff}(\omega)$  à la fréquence  $\omega$  d'un corps noir de rayon  $r_0$ .

Quand l'ouverture est grande devant la longueur d'onde thermique, l'émission thermique est celle d'un corps noir. Cependant, ce résultat montre que l'émissivité d'une ouverture est plus petite que 1 si sa taille est de l'ordre de la longueur d'onde. Si l'on se place à la limite de validité de l'approximation de Kirchhoff quand  $k_0 r_0 = 6$ , on obtient  $\varepsilon_{vac}^{eff} \simeq 0.84$ . Ce résultat peut facilement être interprété en observant que les ondes dont la longueur d'onde est plus grande que l'ouverture sont difficilement transmises à travers elle. L'ouverture se comporte comme un filtre passe-haut qui laisse passer les grandes fréquences aux petites longueurs d'onde et diffracte les petites fréquences aux longueurs d'onde plus grandes que l'ouverture.

Cependant, on sait que l'approximation de Kirchhoff n'est plus valable lorsque l'ouverture devient plus petite que la longueur d'onde considérée, c'est-à-dire pour  $k_0 r_0 < 6$ . Bethe [10] et Bouwkamp [11] ont montré que la transmission à travers une petite ouverture est plus faible que celle donnée par l'approximation de Kirchhoff. Dans le cas d'une ouverture à travers un écran parfaitement conducteur, la matrice de transmission  $\tau(\mathbf{K}, \mathbf{K}')$  dans le régime  $k_0 r_0 \ll 1$  :

$$|\tau_{ik}^s(\mathbf{K}, \mathbf{K}')|^2 = \frac{64}{9} k_0^2 r_0^6 \frac{\cos^2 \theta'}{\cos^2 \theta} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \quad (124)$$

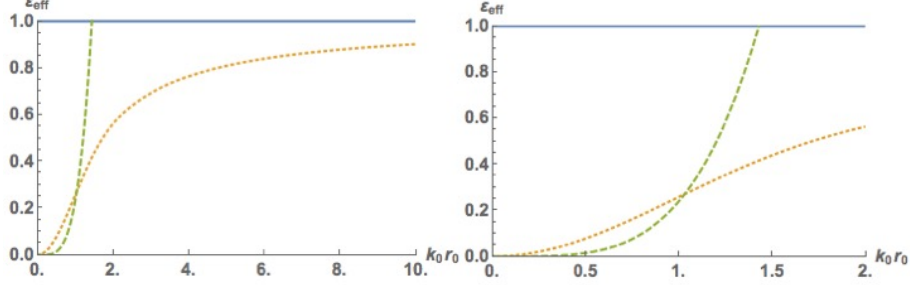


Figure 14: Variation du flux émis pour une fréquence  $\omega$  et une ouverture  $r_0$  en fonction de  $k_0 r_0$ . Pointillés jaunes : approximation de Kirchhoff. Tirets verts : Bethe-Bouwkamp.

pour la polarisation  $s$  et

$$|\tau_{ik}^p(\mathbf{K}, \mathbf{K}')|^2 = \frac{64 k_0^2 r_0^6 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + 1/4 \cos^2 \varphi') - \sin \theta \cos \varphi \sin \theta'}{\cos^2 \theta} \quad (125)$$

pour la polarisation  $p$ . La matrice de transmission se limite aux ondes propagatives ( $K, K' \leq k_0$ ). En reportant ces deux expressions dans l'Eq. 111, on peut effectuer l'intégration sur les nombres d'onde  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}'$ . On obtient l'expression suivante pour le flux émis par un trou sublongueur d'onde:

$$\phi(\omega, T) = \frac{16 k_0^6 r_0^6}{27 \pi^3} \Theta(\omega, T) = \frac{64 k_0^4 r_0^4}{27 \pi^2} \phi^0(\omega, T) = \varepsilon_{eff} \phi^0(\omega, T). \quad (126)$$

Ce résultat montre que l'émissivité effective d'un trou sublongueur d'onde est  $\varepsilon_{eff} = 64(k_0 r_0)^4 / (27\pi^2)$ . Comme attendu, cette émissivité est plus faible que celle obtenue par l'approximation de Kirchhoff qui prévoit une dépendance en  $k_0^2 r_0^2$ . Ces variations d'un flux émis sont représentés sur la Fig. 14. Remarquons que le comportement en  $k_0^4 r_0^4$  obtenu pour un trou sublongueur d'onde est en accord avec ce qui est obtenu par diffusion Rayleigh (*i.e.* une diffusion par des objets bien plus petits que la longueur d'onde). Ce résultat confirme cependant que les petites ouvertures se comportent comme des filtres passe-haut en ce qui concerne l'émission thermique.

L'expression (126) donne le flux radiatif à une fréquence angulaire  $\omega$ . Si la condition  $k_0 r_0 \ll 1$  est satisfaite sur l'ensemble du spectre thermique (typiquement  $\lambda_m/2 < \lambda < 5\lambda_m$  en terme de longueur d'onde), le flux peut-être intégré et le flux total s'écrit:

$$\phi = \int_0^\infty \frac{16 k_0^6 r_0^6}{27 \pi^3} \Theta(\omega, T) d\omega = \frac{128 r_0^4 \pi^4 k_b^8 T^8}{405 c^6 \hbar^7} \times \pi r_0^2. \quad (127)$$

Au lieu de suivre une loi en  $T^4$  comme le fait le rayonnement de corps noir habituel, la puissance émise par un corps noir sublongueur d'onde suit une loi en  $T^8$ .

Pour une taille d'ouverture typique  $r_0$ , quand la température diminue de telle manière que  $\lambda_m$  est plus grand que  $r_0$ , la puissance thermique émise décroît de manière drastique, plus rapidement que ce qui est prévu par la loi de Stefan-Boltzmann. Par exemple, un trou dont le rayon est  $r_0 = 1\mu\text{m}$  à 77 K (température de l'azote liquide) a une exitance totale de  $1.99\text{ W.m}^{-2}$  selon la loi de Stefan-Boltzmann, et de  $4.75 \times 10^{-4}\text{ W.m}^{-2}$  selon la loi déduite de la théorie de Bethe-Bouwkamp. Finalement, remarquons qu'il est quasi impossible d'obtenir une expression analytique dans le régime  $k_0 r_0 \sim 1$ . En effet, dans ce cas, il faudrait suivre les approches qui ont été utilisées pour traiter les problèmes de transmission extraordinaires au travers de trous sublongueur d'onde [12] et calculer l'efficacité d'absorption qui donne directement l'émissivité en utilisant la loi de Kirchhoff.

## References

- [1] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd Ed. (John Wiley and Sons, New-York, 1975)
- [2] K. Joulain, R. Carminati, J.-P. Mulet and J.-J. Greffet, *Phys. Rev. B*, **68**, 245405 (2003)
- [3] S.M. Rytov, Y.A. Kravtsov and V.I. Tatarskii, *Principles of Statistical Radiophysics*, Vol. 3, (Springer-Verlag, Berlin, 1989)
- [4] J.E. Sipe, *J. Opt. Soc. Am. B*, **4**, 481 (1987)
- [5] A. Babuty, K. Joulain, P.-O. Chapuis, J.-J. Greffet et Y. De Wilde, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 146103 (2013)
- [6] D. Polder and D. Van Hove, *Phys. Rev. B*, **4**, 3303 (1971)
- [7] K. Joulain, J.-P. Mulet, F. Marquier, R. Carminati and J.-J. Greffet, *Surface Science Reports*, **57**, 59 (2005)
- [8] A.I. Volokitin and B.N.J. Persson, *Rev. Mod. Phys.*, **79**, 1291 (2007)
- [9] K. Joulain, Y. Ezzahri et R. Carminati, *J. Quant. Spectr. Rad. Transf.*, **173**, 1-6 (2016)
- [10] H.A. Bethe, *Phys. Rev.*, **66**, 163 (1944).
- [11] C.J. Bouwkamp, *Reports on Progress in Physics*, **17**, 35 (1954).
- [12] F.J. Garcia-Vidal, L. Martin-Moreno, T.W. Ebbesen and L. Kuipers, *Rev. Mod. Phys.*, **82**, 729 (2010).