



# Ecole Thématique CNRS ETR2017

## « Rayonnement Thermique en Milieux Semi-Transparentes »

Laboratoire de Thermique et Energie de Nantes, 13-19 mai 2017

## Introduction aux cours de rayonnement des gaz

Frédéric André<sup>1</sup>, Vladimir Solovjov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CETHIL UMR5008 Lyon

<sup>2</sup>BYU, Provo, USA





L'objectif de ce document n'est pas de se substituer à un cours exhaustif sur le thème relativement large de la modélisation du rayonnement des gaz. Les lecteurs intéressés pourront en trouver une version plus complète (DOI: 10.13140/RG.2.2.18900.40329) en téléchargement à l'adresse suivante :

[https://www.researchgate.net/profile/Frederic\\_Andre5](https://www.researchgate.net/profile/Frederic_Andre5)

Ces quelques pages ont pour but de présenter, de façon relativement succincte, le contenu du précédent document ainsi que sa logique. L'une des spécificités du cours proposé dans le cadre des écoles ETR est de décrire, aux lecteurs qui le souhaiteraient, comment construire eux-mêmes un modèle approché précis de rayonnement des gaz, depuis la prise en main de bases de données spectroscopiques (téléchargeables en ligne) jusqu'à la mise en œuvre du modèle ainsi construit pour des calculs de transferts radiatifs. Cependant, il ne se restreint pas non plus à ce strict auditoire (qui serait très probablement limité). Le point de vue des auteurs est qu'il est probablement plus simple de comprendre un modèle si on sait comment il est construit que si on le limite à un jeu d'équations qui, si elles seront évidentes pour certains lecteurs, pourront aussi en rebuter de nombreux autres. C'est dans cet esprit que le document téléchargeable a été construit, en tentant tant que possible d'allier à la fois théorie et aspects plus pratiques.

Il y a ainsi différentes façons d'utiliser ce document : soit comme une description pas-à-pas de méthodes permettant à chacun de se créer son propre modèle ; ou bien comme une introduction permettant d'aborder la lecture de documents plus poussés, comme certains articles de journaux ; ou enfin comme une certaine façon de présenter le problème qui, sans avoir la prétention de révéler une vérité absolue ni de proposer une façon unique de le résoudre, pourra aussi se lire en complément d'autres documents de référence sur le sujet. Certains d'entre eux sont présentés à la fin de cette note.

Le parti pris a aussi été de focaliser une grande partie du document sur les approches dites en  $k$ -distributions. Ceci est lié au constat que ces méthodes sont les plus utilisées à l'heure actuelle, même si elles n'ont pratiquement pas évolué depuis une trentaine d'années. La partie TP/TD proposera, à ceux qui le souhaitent, de s'intéresser à une autre catégorie de modèles.

Enfin, avant d'entrer plus dans les détails, il convient de noter que le domaine du rayonnement des gaz est caractérisé par un langage relativement hermétique au néophyte, basé sur un ensemble de sigles et de dénominations qui rendent au premier abord difficile le choix d'un type de modèle plutôt qu'un autre. Soyons clairs dès à présent : pratiquement tous les modèles existants<sup>1</sup> sont basés sur un nombre de concepts restreint et n'y apportent souvent que des améliorations ou modifications subtiles. Pour le lecteur qui n'aurait pas l'envie (ou le besoin) de consacrer du temps à l'étude du rayonnement des gaz, une version très courte de rappel des idées suffisantes à la compréhension des modèles en  $k$ -distribution est donnée plus tard dans ce document. Elle est loin d'être complète et ne recense que les concepts communs aux approches les plus usuelles. Elle peut suffire à un ingénieur ou un chercheur dont le seul objectif serait de se remémorer, quelques mois après l'école, en quoi consiste le modèle qu'il utilise sans devoir revenir au document complet.

---

<sup>1</sup> Au moins ceux fondés sur la notion de  $k$ -distributions, les autres modèles de bandes étant beaucoup plus riches en termes d'idées et de formulations [4].

## 1. Plan du document téléchargeable

Le document de cours est constitué de 4 grandes parties. La partie TP/TD fait l'objet d'un autre document séparé et ne sera pas détaillée ici.

La première partie a pour objectif de décrire, de façon relativement concise, quelques éléments de physique du rayonnement des gaz. Différentes notions (comme celles de raie d'absorption, d'intensité de raie ou de profil) sont ainsi introduites. Elles sont avant tout mises en relation avec les données disponibles dans des bases de données spectroscopiques telles que HITRAN ou HITEMP. Les éléments fournis dans cette partie ne remplaceront pas un cours dédié à de la spectroscopie moléculaire mais seront suffisants pour construire un code « basique » de calcul de spectres à haute résolution spectrale par l'approche raie-par-raie.

La seconde partie est dédiée à la présentation de l'approche dite en  $k$ -distribution pour la modélisation des propriétés radiatives des gaz dans des situations homogènes isothermes. Le principe de la technique est décrit ainsi que des méthodes permettant de générer des paramètres pour ce type de modèle à partir de données raie-par-raie. Le propos se limite au cas de bandes étroites, c'est-à-dire de largeurs suffisamment faibles pour que la fonction de Planck associée à l'émission du corps noir puisse être traitée comme constante. Au terme de ce chapitre, le lecteur doit être capable de produire des paramètres de modèles en  $k$ -distribution à partir de ses propres données raie-par-raie.

La troisième partie s'intéresse à l'extension de l'approche en  $k$ -distributions à des situations non uniformes, telles que rencontrées le plus souvent en pratique. L'approche dite  $C-k$  ( $k$ -corrélés / co-monotone) est introduite comme généralisation du modèle séparable (dans lequel les dépendances spatiales et spectrales du coefficient d'absorption sont supposées indépendantes). La notion de séparabilité est traitée de façon plus complète dans la partie TP/TD. De nouveau, seules des bandes étroites sont traitées.

La quatrième et dernière partie propose une description des modèles dits globaux. Ce type d'approche est à l'heure actuelle la plus utilisée dans le cadre de transferts couplés. Il s'agit essentiellement d'une extension des concepts issus des bandes étroites à l'ensemble du spectre. Cette partie se focalise essentiellement sur l'approche SLW (Spectral-Line Weighted-sum of gray gases, [1]) qui est l'une des plus anciennes méthodes globales fondées sur l'idée de « corrélation » à avoir été proposée.

Le document complet comporte plus de 170 pages<sup>2</sup>. La partie suivante propose une version courte des chapitres 2 et 3. Elle vise à décrire dans les grandes lignes et en quelques pages le principe des  $k$ -distributions, sans entrer dans le même niveau de détail que le document complet.

## 2. Se remémorer le principe des modèles en $k$ -distribution et $C-k$ en moins de 10 minutes (ou presque)

Ambartsumian a introduit le principe des approches en  $k$ -distributions en 1932 [2]. Pendant plusieurs décennies, cette technique a été utilisée (essentiellement en physique de l'atmosphère) sous le nom de « méthode d'Ambartsumian ». La vision statistique, aujourd'hui largement répandue, est apparue en 1968 [3] puis s'est développée durant toute la fin du 20<sup>ème</sup> siècle.

---

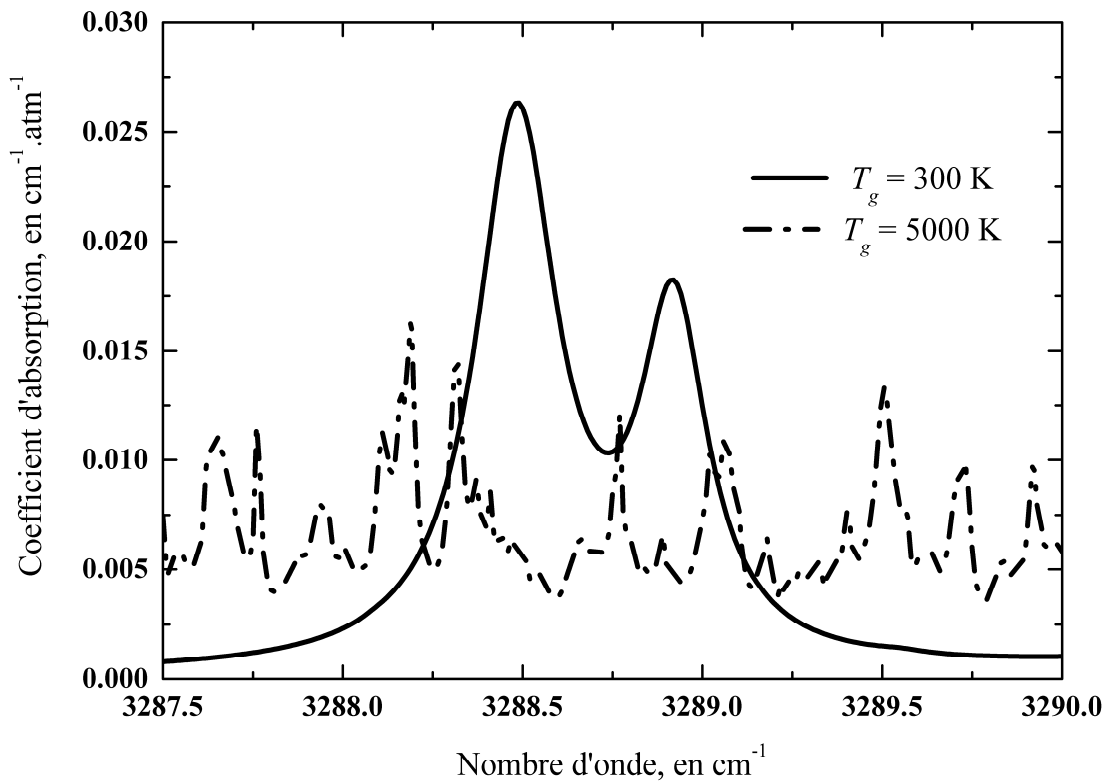
<sup>2</sup> Il reste cependant encore bien loin aussi bien en taille qu'en contenu d'ouvrages récents, comme le livre de Young [4] qui approche les 800 pages rien que sur les modèles de bandes.

## 2.1. $k$ -distributions sur des bandes étroites en milieux uniformes

L'objectif de tous les modèles approchés de rayonnement des gaz est de réduire le coût d'un calcul radiatif par rapport à l'approche raie-par-raie (qui nécessite pour sa mise en œuvre quelques  $10^6$  résolutions monochromatiques de l'Equation du Transfert Radiatif, ETR afin de décrire correctement la dynamique des spectres à haute résolution spectrale illustrée sur la FIGURE 1) en moyennant les propriétés sur des intervalles spectraux plus ou moins larges afin de se ramener à un nombre d'ETR à résoudre « faible », de l'ordre de quelques dizaines à quelques centaines.

Il existe plusieurs types de modèles, classés suivant la largeur de la bande sur laquelle les propriétés du gaz sont moyennées : 1/ bandes étroites, sur lesquelles la fonction de Planck est constante ou supposée comme telle (de quelques à quelques dizaines de  $\text{cm}^{-1}$  à quelques centaines d'ETR à résoudre) ; les bandes larges (de quelques centaines à quelques milliers de  $\text{cm}^{-1}$  à quelques dizaines d'ETR à résoudre) ; 3/ les approches globales, dont l'objectif est de définir des propriétés moyennées sur l'ensemble du spectre d'émission du corps noir (à quelques ETR à résoudre). Dans le cas de bandes étroites, ce à quoi nous nous limiterons ici, l'objectif est ainsi par exemple d'évaluer la transmissivité d'un trajet de longueur  $L$  dans le gaz moyennée sur une bande (voir la définition en haut de la FIGURE 2).

Si le gaz est supposé gris (1 GG sur la FIGURE 2), c'est-à-dire si son coefficient d'absorption ne dépend pas du nombre d'onde, l'exponentielle peut sortir de l'intégrale spectrale. Dans ce cas, la transmissivité  $\tau^{\Delta\eta}(L)$  suit la loi de Beer-Lambert (1 GG).



**FIGURE 1.** Exemple de spectres à hautes résolutions spectrales. Mélange 10 %  $\text{H}_2\text{O}$ -90 %  $\text{N}_2$  à pression atmosphérique.

Si le gaz n'est pas gris mais peut être représenté à l'aide de deux gaz gris (2 GG sur la FIGURE 2), la transmissivité s'écrit comme une somme pondérée d'exponentielles. Le poids correspondant à un gaz gris de coefficient d'absorption donné  $k$  (ou  $k'$ ) représente la fraction de l'intervalle spectral sur lequel le coefficient d'absorption du gaz prend la valeur  $k$  (ou  $k'$ ). Ces poids peuvent ainsi être interprétés comme la probabilité que le coefficient d'absorption du gaz prenne une valeur  $k$  (ou  $k'$ ) donnée sur la bande étroite. Cette probabilité dépend uniquement des tailles totales des intervalles spectraux sur lesquels le coefficient d'absorption prend une valeur fixe, mais pas de la façon dont ces intervalles sont distribués sur l'axe des nombres d'ondes (bas de la FIGURE 2).

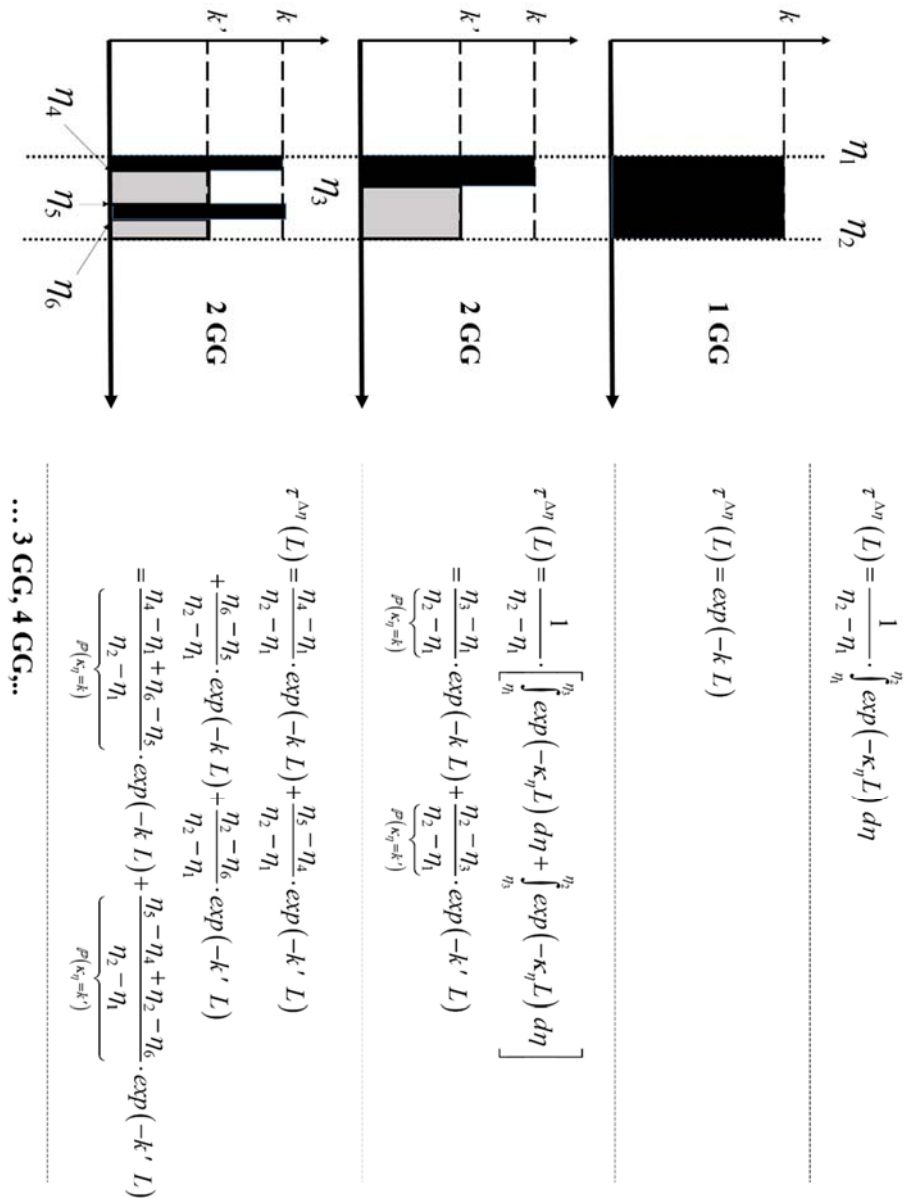
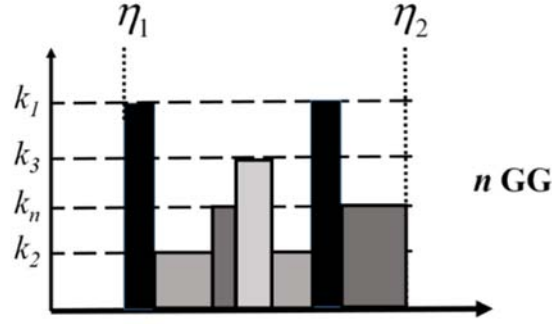
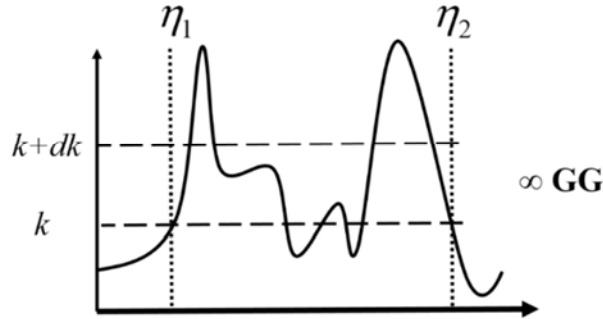


FIGURE 2. D'un gaz gris (GG) à une somme pondérée de gaz gris.



$$n \text{ GG: } \tau^{\Delta\eta}(L) = \mathbb{P}(\kappa_\eta = k_1) \cdot \exp(-k_1 L) + \mathbb{P}(\kappa_\eta = k_2) \cdot \exp(-k_2 L) \\ + \dots + \mathbb{P}(\kappa_\eta = k_n) \cdot \exp(-k_n L)$$

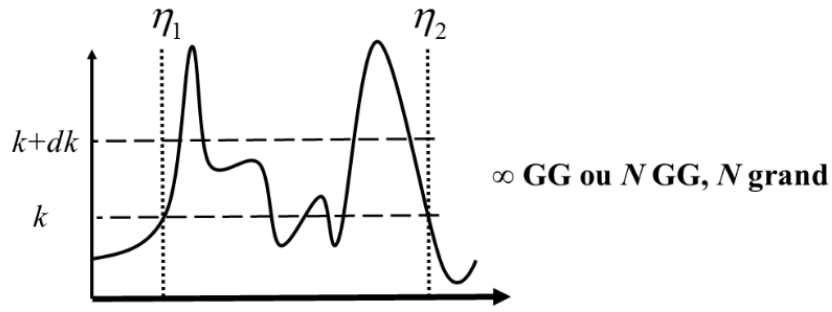


$$\infty \text{ GG: } \tau^{\Delta\eta}(L) = \int_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial \mathbb{P}(\kappa_\eta < k)}{\partial k} \cdot \exp(-k L) dk$$

**FIGURE 3.** D'une somme pondérée de gaz gris à une  $k$ -distribution.

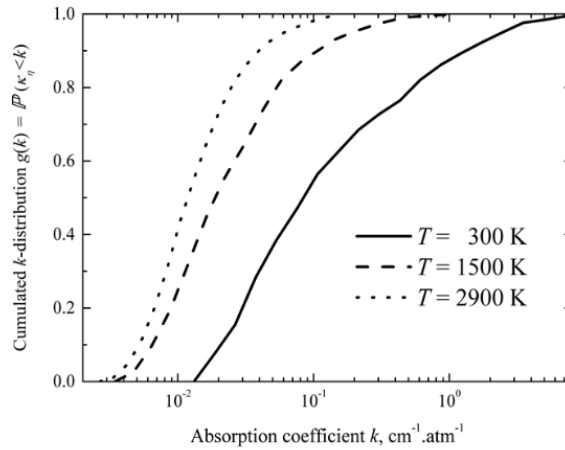
La même idée peut s'appliquer à un nombre quelconque de gaz gris (voir  $n$  GG sur la FIGURE 3). Cependant, si  $n$  tend vers l'infini (cas d'un spectre continu), alors il n'est plus possible de définir la probabilité que le coefficient d'absorption prenne une valeur donnée. Le passage à la limite nécessite d'écrire la transmissivité sous une forme intégrale (bas de la FIGURE 3) qui fait intervenir la probabilité que le coefficient d'absorption monochromatique du gaz prenne des valeurs inférieures à une limite supérieure  $k$ . La dérivée de cette probabilité s'appelle la  $k$ -distribution. La transmissivité est la transformée de Laplace de la  $k$ -distribution.

La méthode permettant d'estimer la probabilité  $P$  est décrite sur la FIGURE 4, dans le cas d'un jeu de taille finie de valeurs du coefficient d'absorption sur une bande (ce que l'on a toujours en pratique, les spectres à haute résolution spectrale dont on dispose étant toujours estimés pour un nombre fini de valeurs du nombre d'onde). En bas de cette même FIGURE 4, quelques exemples de  $k$ -distributions cumulées (c'est-à-dire  $P$ ) sont représentées.



Spectre discret :  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N) \rightarrow (\kappa_{\eta_1}, \kappa_{\eta_2}, \dots, \kappa_{\eta_N})$

$$\mathbb{P}(\kappa_{\eta} < k) = \frac{1}{N} \cdot \text{Card}\{i = 1, \dots, N : \kappa_{\eta_i} < k\} = g(k)$$



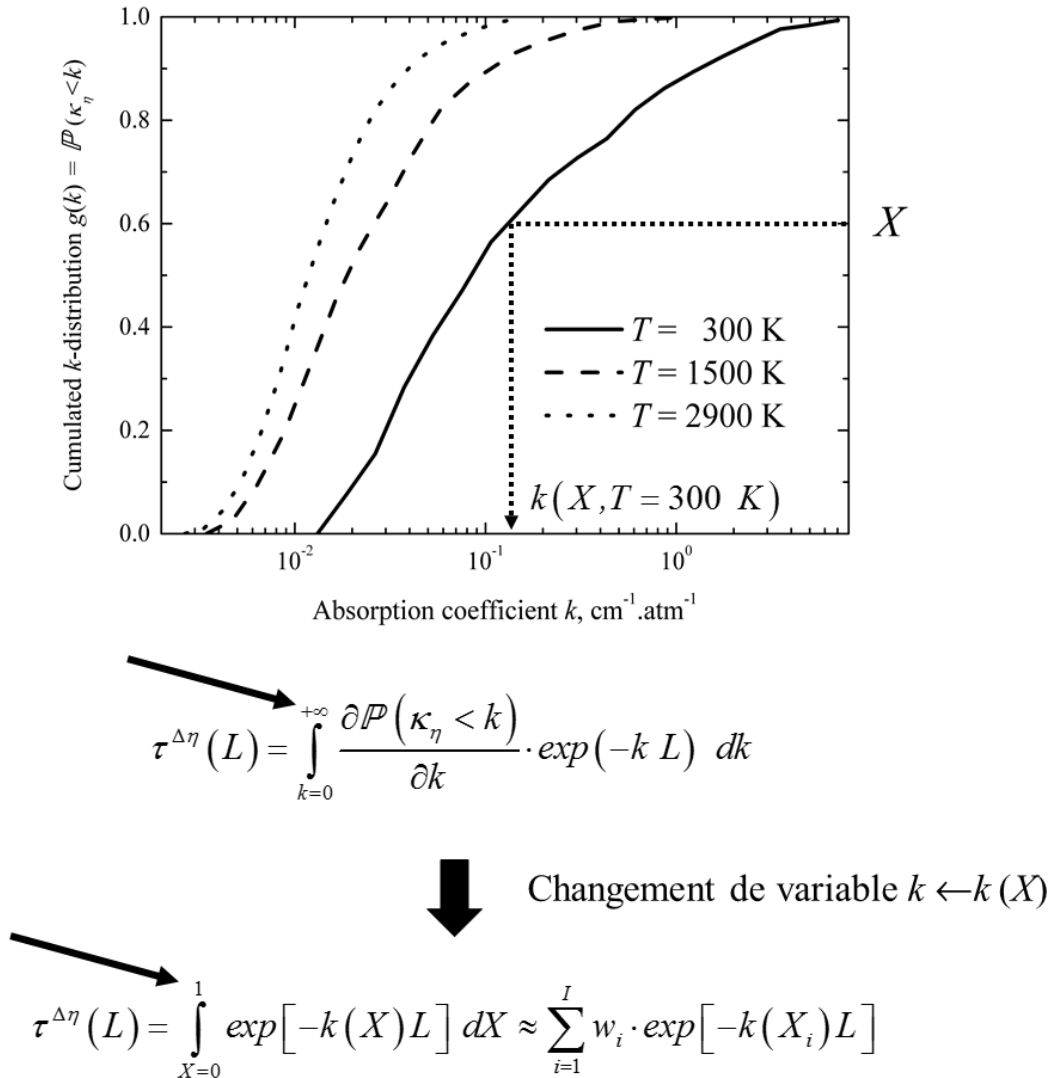
**FIGURE 4.**  $k$ -distribution cumulée. En haut: comment évaluer une  $k$ -distribution cumulée à partir d'un jeu de taille finie de valeurs du coefficient d'absorption ; en bas : quelques exemples de  $k$ -distributions cumulées,  $g(k)$ .

Les distributions cumulées : 1/ sont strictement croissantes et donc inversibles, 2/ prennent des valeurs comprises entre 0 et 1. Ainsi, pour n'importe quel réel  $X$  compris entre ces bornes, on peut trouver une valeur  $k(X)$  telle que la valeur de la  $k$ -distribution cumulée pour la valeur  $k = k(X)$  soit  $X$ . Ceci est représenté sur la FIGURE 5. Cette propriété permet de proposer le changement de variable  $k \rightarrow k(X)$  afin d'évaluer la transmissivité moyennée sur la bande, comme illustré aussi sur la FIGURE 5.

L'intérêt du changement de variable ainsi introduit est de ramener l'intégrale initialement entre 0 et l'infini (en fait entre les valeurs minimales et maximales du coefficient d'absorption sur la bande) à l'intervalle  $[0,1]$  (voir les flèches sur la FIGURE 5). Ceci permet l'utilisation de quadratures numériques simples (de type Gauss-Legendre) pour calculer la moyenne spectrale. Ce type d'approximation est décrit sur la dernière équation de la FIGURE 5. Dans cette relation,  $w_i$  et  $X_i$  sont respectivement les poids et abscisses de la quadrature choisie. Dans les problèmes de combustion et sur des bandes étroites, les quadratures rencontrées ont des ordres  $I$  (bornes supérieure de sommation) de l'ordre de la dizaine. Des valeurs bien plus grandes peuvent être



rencontrées en physique de l'atmosphère ou dans le cas de modèles globaux. Une fois formulé sous une forme discrète, le modèle en  $k$ -distribution se résume à une somme pondérée de gaz gris (comparer les équations des FIGURE 3 et FIGURE 5).



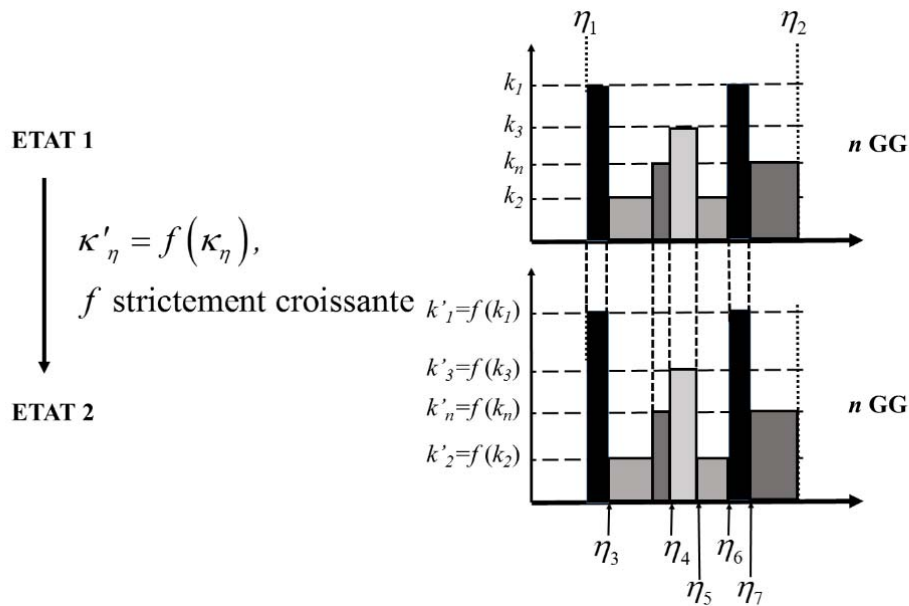
**FIGURE 5.** Inversion des  $k$ -distributions cumulées et changement des bornes d'intégration.

## 2.2. $k$ -distributions sur des bandes étroites pour des trajets non uniformes : l'approche C- $k$

Jusqu'à présent, nous avons restreint notre propos au cas de trajets uniformes (homogènes isothermes) dans le gaz. Dans la plupart des cas, les gaz à traiter ne sont pas uniformes mais le sièges de gradients de température, de composition en espèces absorbantes, et de pression. Dans ces situations, il est nécessaire d'adapter les principes décrits précédemment. L'extension du modèle en  $k$ -distribution à ce cas général est relativement récent (1979) et appelé usuellement la méthode en  $k$ -corrélés (C- $k$ , [3]).

L'approche C- $k$  consiste essentiellement à supposer qu'il est possible de relier n'importe quel couple de spectres de gaz dans des états thermophysiques différents par le biais d'une fonction  $f$  strictement croissante ne dépendant que des états thermophysiques du gaz mais pas du nombre d'onde (les spectres sont alors dits corrélés. Ils sont, plus proprement, co-monotones. La co-monotonie résulte simplement du fait que la fonction  $f$  étant supposée strictement croissante, sa dérivée est positive quelle que soit la valeur de son argument et donc les dérivées par rapport au nombre d'onde en tous les points des spectres sont de même signe). Ce faisant, un gaz gris dans un état thermophysique donné restera, dans les mêmes régions du spectre, gris dans l'autre état. Par conséquent, la transformation strictement croissante  $f$  préserve les probabilités attribuées à chaque gaz gris (ceci est illustré sur la FIGURE 6, en haut).

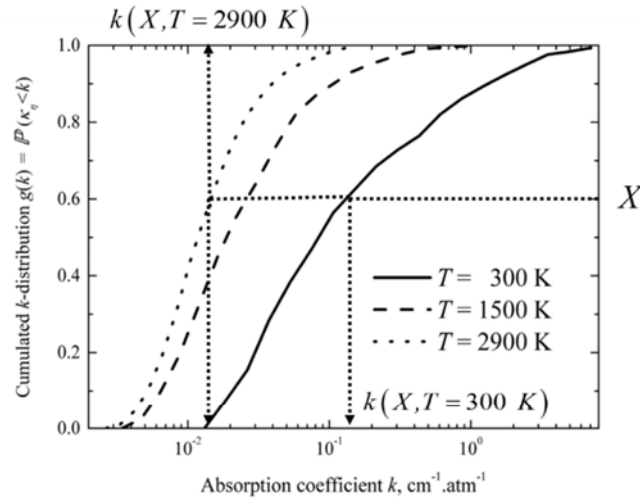
La grande force de l'approche C- $k$  réside dans le fait que la fonction  $f$  n'a pas besoin d'être formulée explicitement dans la mesure où seule l'égalité supposée entre  $g(k) = P(\kappa_\eta < k)$  et  $g'(k') = P[\kappa'_\eta < k' = f(k)]$  suffit à la définir de façon implicite. Ceci est illustré sur la FIGURE 6 (en haut). Le bas de cette même FIGURE 6 décrit l'utilisation de l'approche C- $k$  dans le cas d'un trajet non uniforme découpé en deux trajets uniformes. Ce même principe s'étend sans difficulté à un nombre quelconque de sous-trajets uniformes.



Par exemple :

$$\mathbb{P}(\kappa_\eta < k_3) = g(k_3) = \frac{(\eta_2 - \eta_7) + (\eta_6 - \eta_5) + (\eta_4 - \eta_3)}{\eta_2 - \eta_1} = \mathbb{P}(\kappa'_\eta < k'_3) = g'(k'_3)$$

**FIGURE 6-a.** La méthode C- $k$



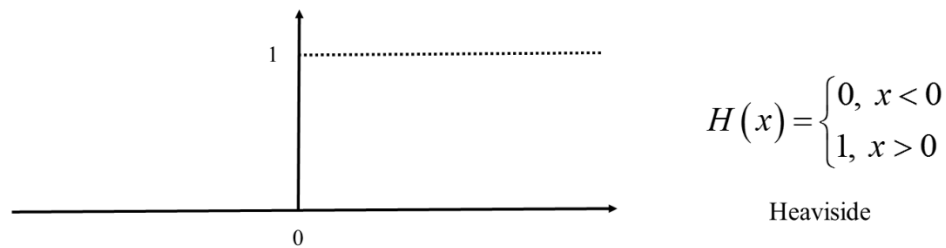
$$\kappa_{\eta} \rightarrow k(X_i) = k(X_i, T = 300 \text{ K})$$

$$\kappa'_{\eta} \rightarrow k'(X_i) = k(X_i, T = 2900 \text{ K})$$

$$\tau^{\Delta\eta}(L_1, L_2) = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \cdot \int_{\eta_1}^{\eta_2} \exp(-\kappa_{\eta} L_1 - \kappa'_{\eta} L_2) d\eta \approx \sum_{i=1}^I w_i \cdot \exp[-k(X_i) L_1 - k'(X_i) L_2]$$

**FIGURE 6-b.** La méthode C-k

Les concepts évoqués sur des bandes étroites peuvent s'étendre à l'ensemble du spectre, conduisant aux **modèles en k-distribution dits globaux**. Pour ces modèles, la différence essentielle provient de la manière de calculer la k-distribution qui dans ce cas dépend de la fonction de Planck à une température  $T_b$ . Ceci est illustré sur la FIGURE 7. La relation implicite permettant de relier les spectres dans des états thermophysiques différents sous l'hypothèse de corrélation / co-monotonie des spectres met alors en jeu des distributions évaluées à la même température de pondération  $T_b$ .



Bande étroite

$$\mathbb{P}(\kappa_{\eta} < k) = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \cdot \int_{\eta_1}^{\eta_2} H(k - \kappa_{\eta}) d\eta$$

Méthode globale

$$\mathbb{P}(\kappa_{\eta} < k) = \frac{\pi}{\sigma T_b^4} \cdot \int_0^{+\infty} H(k - \kappa_{\eta}) I_{b,\eta}(T_b) d\eta$$

$T_b$ : température de corps noir

**FIGURE 7.** k-distributions en modèles à bandes étroites et globaux.

### 3. Commentaires et conclusion

Les quelques éléments décrits dans la partie précédente contiennent pratiquement l'ensemble des idées utilisées dans les approches en  $k$ -distributions dites « corrélées ». La simplicité relative de ces modèles, alliée à une formulation possible en terme de coefficient d'absorption et une précision assez remarquable, leur a permis rapidement de prendre le dessus sur un bon nombre d'approches formulées en transmissivités. Leur extension à l'ensemble du spectre a aussi joué un rôle déterminant dans leur appropriation par la communauté scientifique, assez vaste en termes d'applications possibles (combustion au sens large, i.e. feux, motoristes, etc ; physique de l'atmosphère ; entre autres).

Cependant, force est de constater qu'elles restent relativement limitées. En effet, il n'existe pas à l'heure actuelle de façon simple, rapide et précise de passer outre l'hypothèse de corrélation / co-monotonie. Si le problème traité s'accommode de ce type d'hypothèse (ce que l'on ne sait généralement pas a priori sauf dans le cas de milieux relativement uniformes), alors ce type d'approche donne des résultats extrêmement proches de calculs raie-par-raie. Dans le cas contraire, pour maintenir un coût de calcul acceptable, il est souvent préférable de passer à des modèles formulés en transmissivités. Dans ces situations, comme le souligne Young [4], les modèles de bandes usuels peuvent s'avérer beaucoup plus performants dans la mesure où, par exemple, ils ne nécessitent pas de sommations multiples (voir en bas de la FIGURE 5). Ce même constat peut se faire dès lors que les propriétés radiatives des parois qui délimitent le gaz ne sont pas grises : dans ces situations, le découpage du modèle en sous-bandes peut rendre l'utilisation de  $k$ -distributions rapidement coûteuse. Ceci lie assez intimement l'avenir des modèles de gaz à d'autres domaines du transfert radiatif, et notamment aux travaux menés sur les propriétés radiatives des matériaux. En effet, plus les conditions aux limites radiatives seront non grises, comme très souvent actuellement, plus un retour à des méthodes différentes de celles en vogue aujourd'hui est susceptible de s'opérer.

Pour conclure cette introduction brève, je souhaiterais donner quelques mots rapides concernant l'avenir possible des modèles approchés de rayonnement des gaz. Les moyens de calculs ayant fortement augmenté ces dernières décennies, la mise en œuvre de calculs associant l'approche raie-par-raie à une technique de résolution de l'ETR par Monte Carlo est devenue réaliste. Il est fort probable que ces méthodes continuent de se développer à l'avenir. Ceci rendra vraisemblablement l'utilisation des méthodes en  $k$ -distributions caduque, vu que ces deux types d'approches sont fondées sur des vues assez proches. Néanmoins, dans un grand nombre de situations (en transferts couplés ou en physique de l'atmosphère), les modèles approchés resteront irremplaçables du fait de leur excellent rapport coût / précision. Ceci est aussi lié au fait qu'à moyens de calculs doublés, nombre d'utilisateurs auront plus naturellement envie d'allouer de la ressource processeur à leurs problématiques propres (mécanique des fluides, combustion, etc) qu'au rayonnement, même s'ils sont prêts à admettre la nécessité de prendre en compte ce mode de transfert dans leurs études. Ainsi, un utilisateur disposé à consacrer aujourd'hui 1 % de son coût de calcul au rayonnement continuera vraisemblablement à admettre ce même pourcentage quelle que soit la puissance de calcul disponible. Vu sous cet angle pragmatique des relations existantes entre les « développeurs » et « utilisateurs » d'outils de modélisation des propriétés radiatives des gaz, les modèles approchés ont encore de beaux jours devant eux.

Maintenant, tout l'enjeu est d'identifier quelles améliorations sont susceptibles d'entrer dans ces 1 % (qui au fil du temps vont croître et permettre la mise en œuvre de modèles de plus en plus fins et performants). Différentes options sont possibles, mais la quantification d'incertitude, qui ne peut actuellement se faire que par comparaison à des calculs raie-par-raie de référence difficilement envisageables dans certaines configurations réelles, est celle qui semble la plus réaliste à moyen terme [5]. Son développement nécessitera sans doute de fortes interactions entre modèles approchés et méthodes de Monte Carlo – raie-par-raie, ces deux types de techniques s'enrichissant mutuellement, comme des outils complémentaires plus que des méthodes concurrentes.

L'approche en  $\ell$ -distribution<sup>3</sup> [6], qui fera l'objet du TP/TD, a été spécifiquement développée dans cette optique de quantification d'incertitudes puisqu'elle se couple bien plus simplement aux développements décrits dans la Ref. [5] que les  $k$ -distributions. Ceci tient au fait que la quantification d'incertitude se formalise assez naturellement sous l'angle de la séparabilité et que les  $\ell$ -distributions sont intrinsèquement fondées sur la notion, assez proche, de coefficients de séparabilité effectifs.

---

<sup>3</sup> Puisque cette question m'a été posée à plusieurs reprises, le « L » de  $\ell$ -distribution utilise la police *Brush Script MT*.

## REFERENCES

- [1] M.K. Denison, B.W. Webb, "A spectral line based weighted-sum-of-gray-gases model for arbitrary RTE solvers," ASME J. Heat Transfer, vol. 115, pp. 1004-1012, 1993.
- [2] V. Ambartsumian, "The effect of the absorption lines on the radiative equilibrium of the outer layers of the stars", Publ. Obs. Astron. Univ. Leningrad, Vol. 6, pp 7-18, 1934.
- [3] A. Lacis, W.-C. Wang, J.E. Hansen, "Correlated k-distribution method for radiative transfer in climate models: application to effect of cirrus clouds on climate", NASA. Goddard Space Flight Center 4<sup>th</sup> NASA Weather and Climate Program Sci. Rev.; pp.309-314, 1979.
- [4] S.J. Young, Band model theory of radiation transport, The Aerospace Press, 2013. ISBN: 978-1-884989-25-4.
- [5] J. Tencer, J.R. Howell, "Quantification of model-form uncertainty in the correlated-k distribution method for radiation heat transfer", in: Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Symposium on Radiative Transfer RAD-13, Kusadasi, Turkey, 2013.
- [6] F. Andre, "The  $\ell$ -distribution method for modeling of non-gray absorption in uniform and non-uniform gaseous medium," J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer, vol. 179, 19-32, 2016.

## REFERENCES COMPLEMENTAIRES

- R.M. Goody, Y.L. Yung, Atmospheric Radiation: Theoretical Basis, Oxford University Press, 1989.
- M.F. Modest, Radiative Heat Transfer, 3<sup>rd</sup> Ed., 2013.
- J. Taine, A. Soufiani, Gas IR radiative properties: From spectroscopic data to approximate models, Adv. Heat Transfer, Vol. 33, PP 295-414, 1999.
- S.J. Young, Band model theory of radiation transport, The Aerospace Press, 2013. ISBN: 978-1-884989-25-4.