



Ecole Thématique CNRS ETR2017

« Rayonnement Thermique en Milieux Semi-Transparents »

Laboratoire de Thermique et Energie de Nantes, 13-19 mai 2017

Physique du transfert radiatif en milieu semi-transparent

Stéphane Blanco¹, Jérémi Dauchet², Mouna El Hafi³, Richard Fournier¹

¹LAPLACE UMR5213 Toulouse

²INSTITUT PASCAL UMR6602 Aubière

³RAPSODEE UMR5302 Albi



Table des matières

1	L'équation de transfert radiatif d'un point de vue statistique	4
1.1	Description mésoscopique	4
1.2	Forme locale (ou différentielle) de l'équation de transfert radiatif . . .	8
1.3	Construction de la forme intégrale de l'équation de transfert radiatif à partir de la statistique du transport corpusculaire.	12
1.4	La pertinence de ce choix de modélisation	23
2	Epaisseurs optiques et invariance d'échelle du transport	25
3	Approximation macroscopique (approximation de diffusion)	30
3.1	Dérivation de l'équation de diffusion à partir de l'équation de transfert radiatif	30
3.2	Conditions aux limites	36
4	Point de vue statistique et simulation numérique : la méthode de Monte Carlo	40
	Bibliographie	43
	Nomenclature	45

AVANT PROPOS

Le présent cours s'appuie sur l'écrit de thèse de Jérémie Dauchet [1] et sur les supports de cours donnés par les auteurs en master de physique et en master recherche "Dynamique des Fluides Energétique et Transferts" à l'Université Paul Sabatier. L'objectif est de présenter les fondements et de donner quelques éléments de la pratique du transfert radiatif. Nous faisons le choix de rendre cet écrit compatible, autant que possible, avec les notations et le vocabulaire usuels de la physique du transport linéaire. Nous espérons n'avoir rien perdu des spécificités du transfert de photons et avoir seulement facilité l'accès à une littérature plus large à laquelle les spécialistes du transfert radiatif ont beaucoup contribué et dans laquelle ils ont souvent trouvé des inspirations venues d'autres champs applicatifs, notamment de la neutronique et de la physique des plasma. En entrant dans domaine du transfert radiatif, on devient donc conjointement un spécialiste de la physique du rayonnement et un spécialiste de la physique du transport linéaire et nous espérons que cette introduction rend perceptible cette double appartenance.

1 L'équation de transfert radiatif d'un point de vue statistique

1.1 Description mésoscopique

On note $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t)$ le descripteur mésoscopique de l'ensemble des photons présents dans le système. f est appelé la *fonction de distribution* et l'équation d'évolution de cette fonction de distribution est appelée l'*équation de transfert radiatif*. Il s'agit d'une *équation de transport* particulière. Elle correspond à une simplification de l'équation de Boltzmann (dérivée par Ludwig Boltzmann en 1872 pour décrire un gaz dilué de particules identiques). Deux spécificités des photons en tant que particules sont essentielle dans cette simplification :

1. les photons se propagent tous avec une vitesse localement identique, la vitesse de la lumière c dans le milieu,
2. ils n'interagissent pas les uns avec les autres mais seulement avec le milieu, on parle alors de *transport linéaire*.

Les équations de transport, ou plus généralement les modèles mésoscopiques, ou modèles cinétiques, correspondent à une description statistique adaptée à des systèmes complexes comportant notamment un grand nombre de degrés de liberté. C'est bien sûr le cas d'un grand ensemble de photons se propageant dans un milieu diffusant, aussi bien que d'un grand ensemble de molécules au sein d'un fluide, d'un plasma, etc. Ces approches de modélisation sont fondées sur l'hypothèse de la répétition d'un grand nombre d'événements statistiques au sein du système, ce qui se justifie soit par la présence d'un grand nombre de particules, soit par la réplication d'un grand nombre d'expériences pour une seule particule (ces deux conditions étant rigoureusement équivalentes dans le cadre du transport linéaire). Nous allons voir que les équations de type Boltzmann, l'équation de transfert radiatif en particulier, sont particulièrement adaptées à la description des situations de hors-équilibre (y compris lointain) car toute l'information sur la distribution des états des particules est modélisée statistiquement. Dans le cas du rayonnement, en modèle monochromatique, l'état du photon se résume à sa position \mathbf{x} et à sa direction de propagation $\boldsymbol{\omega}$ et l'information portée par f est bien la distribution statistique de ces positions et de ces directions de propagation.

A une normalisation près, toujours pour un rayonnement monochromatique, $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t)$ est au temps t la densité de probabilité de trouver un photon en un point de l'espace des phases $\{\mathcal{D}_{\mathbf{x}}, \mathcal{D}_{\boldsymbol{\omega}}\}$. L'espace des phases est ici un espace à cinq dimensions : trois pour l'espace géométrique $\mathcal{D}_{\mathbf{x}}$ qui représente le volume \mathcal{V} du système (*e.g.* le volume réactionnel d'un photobioréacteur, d'une chambre de combustion, d'une couche atmosphérique) et deux pour

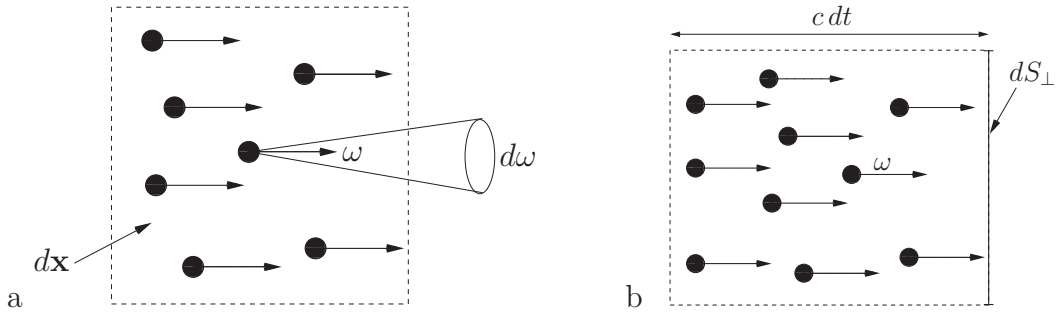


FIGURE 1: Volume de l'espace des phases. a : Élément de volume. b : Définition de la luminance à partir de la fonction de distribution. La quantité d'énergie rayonnante δQ qui traverse pendant dt la surface dS_{\perp} est égale au nombre de photons se propageant dans la direction ω dans le volume $c dt dS_{\perp}$ multiplié par l'énergie de chaque photon.

l'espace des directions de propagation \mathcal{D}_{ω} qui est l'angle solide total (noté 4π par la suite). Il est souvent plus intuitif de raisonner sur la quantité $f(\mathbf{x}, \omega, t) d\mathbf{x} d\omega$, qui représente à l'instant t , dans l'élément de volume $d\mathbf{x}$ autour de la position \mathbf{x} , le nombre de photons se déplaçant avec une direction contenue dans l'élément d'angle solide $d\omega$ autour de ω (voir Fig. 1.a).

Les propriétés de diffusion et d'absorption des photons dépendent de leur fréquence ν . Il convient donc de distinguer les photons du système en fonction de leur appartenance à un élément de fréquence $d\nu$ de la gamme spectrale étudiée. La fonction de distribution dépend alors, en plus de \mathbf{x} , ω et t , de la variable ν . Cette dépendance fonctionnelle est en général notée $f_{\nu}(\mathbf{x}, \omega, t)$ (plutôt que $f(\mathbf{x}, \omega, \nu, t)$) afin de spécifier son caractère particulier : dans le cadre de la diffusion élastique (ce qui est le cas dans le présent document), aucun opérateur de l'équation de transfert radiatif ne fait intervenir la fréquence (seules les propriétés radiatives sont fonction de ν) et les équations d'évolution des f_{ν} sont donc indépendantes. Cependant, la fréquence du rayonnement est une dimension du problème, au même titre que l'espace des phases, et $f_{\nu}(\mathbf{x}, \omega, t) d\mathbf{x} d\omega d\nu$ est à l'instant t , dans l'élément de volume de l'espace des phases $d\mathbf{x} d\omega$ autour de (\mathbf{x}, ω) , le nombre de photons ayant une fréquence contenue dans l'élément $d\nu$ autour de ν .

La grandeur mésoscopique décrivant le rayonnement en un point de l'espace des phases est généralement, dans la communauté des sciences pour l'ingénieur, la luminance plutôt que la fonction de distribution. La luminance $L_{\nu}(\mathbf{x}, \omega, t)$ à la position \mathbf{x} , dans la direction ω , à la fréquence ν et à l'instant t s'exprime en $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1} \cdot Hz^{-1}$. C'est une puissance par unité de surface normale à la direction ω , par unité d'angle solide et par unité de fréquence. Afin

de faire le lien entre cette grandeur et la fonction de distribution, considérons la quantité d'énergie rayonnante δQ qui traverse pendant dt la surface dS_{\perp} (perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$) dans la direction $\boldsymbol{\omega}$:

$$\delta Q = \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} d\nu L_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t) dt d\boldsymbol{\omega} dS_{\perp} \quad (1)$$

où $[\nu_{min}, \nu_{max}]$ est la plage spectrale considérée. Cette quantité est aussi égale au nombre de photons se propageant avec la direction $\boldsymbol{\omega}$ dans le volume $dS_{\perp} c dt$ (voir Fig. 1.b), multiplié par leur énergie :

$$\delta Q = \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} d\nu h\nu \times f_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t) dS_{\perp} c dt d\boldsymbol{\omega} \quad (2)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le milieu, $h\nu$ est l'énergie d'un photon de fréquence ν et $f_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t) dS_{\perp} c dt d\boldsymbol{\omega} d\nu$ est le nombre de photons de fréquence ν , à $d\nu$ près, et de direction $\boldsymbol{\omega}$, à $d\boldsymbol{\omega}$ près, dans le volume $dS_{\perp} c dt$. On obtient ainsi la relation suivante entre f et L :

$$L_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t) = c h\nu f_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t) \quad (3)$$

A une constante près, L et f sont donc identiques. Pourtant les images physiques qui leurs sont associées sont très différentes. f est une densité de photons; L est un flux d'énergie. Par la suite, nous utiliserons presque exclusivement la notation L , mais à chaque phase du raisonnement nous insisterons fortement sur la pertinence d'une pensée en densité ou d'une pensée en flux. Pour bien illustrer cette alternative, nous allons introduire dès maintenant deux grandeurs macroscopiques que nous utiliserons au paragraphe 3 : l'irradiance G et le vecteur densité surfacique de flux \mathbf{j}_R . On parle de description macroscopique dès lors que l'on abandonne l'idée de décrire entièrement la distribution des directions de propagation : on garde toute l'information sur la distribution spatiale des photons, mais seulement une information limitée sur la distribution angulaire. La paire $\{G, \mathbf{j}_R\}$ est typique d'une telle description. En modèle monochromatique, l'irradiance $G_{\nu}(\mathbf{x}, t)$ est l'intégrale des luminances incidentes en \mathbf{x} dans toutes les directions :

$$G_{\nu}(\mathbf{x}, t) = \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} L_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t) \quad (4)$$

Le vecteur densité surfacique de flux radiatif $\mathbf{j}_{R,\nu}(\mathbf{x}, t)$ est l'intégrale des luminances incidentes multipliées par le vecteur $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{j}_{R,\nu}(\mathbf{x}, t) = \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} L_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t) \boldsymbol{\omega} \quad (5)$$

Lorsqu'on propose un premier niveau d'interprétation de chacune de ces deux grandeurs, fait-

on appelle à des images physiques de type “densité de photons” ou bien “densité de flux” ?
Fait-on appel à f_ν ou à L_ν ?

Lorsqu’on fait appel aux images physiques associées à la luminance, on parle de flux d’énergie à travers une surface perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$. Or dans la définition de G_ν on intègre sur toutes les directions et il est difficile de continuer à associer à G_ν une image de flux surfacique : à travers quelle surface ? Par contre, si on part de l’image en densité, alors l’interprétation physique de G_ν est immédiate : $f_\nu d\mathbf{x} d\boldsymbol{\omega} d\nu$ est un nombre de photons se propageant dans un angle solide élémentaire $d\boldsymbol{\omega}$, donc $\int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} f_\nu d\mathbf{x} d\nu$ compte tous les photons indépendamment de leur direction de propagation. L’intégrale $\int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} f_\nu$ est donc une densité de photons de façon parfaitement analogue à la densité d’un gaz : un nombre de particule par unité de volume (pour nous également par unité de fréquence) en comptant les particules sans s’occuper de leur direction de déplacement. A une constante près G_ν s’interprète donc aussi comme une densité de photons (ou comme une densité d’énergie radiative).

Pour $\mathbf{j}_{R,\nu}$ le raisonnement est différent. Là encore on intègre sur les directions et on pourrait donc croire que la pensée surfacique n’est plus pertinente. Mais $\mathbf{j}_{R,\nu}$ est un vecteur densité surfacique de flux et son sens est donné par la grandeur $\varphi_\nu(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}_{R,\nu}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$ qui est la densité surfacique de flux radiatif φ_ν traversant une surface de normale \mathbf{n} en \mathbf{x} . Donc $\mathbf{j}_{R,\nu}$ est conçu pour être utilisé lorsqu’une surface est définie. Par conséquent les images de flux associées à L_ν sont immédiatement pertinentes. En effet, L_ν est défini comme la densité surfacique de flux radiatif à travers une surface de normale $\boldsymbol{\omega}$ pour les photons se propageant dans la direction $\boldsymbol{\omega}$. Par projection $L_\nu \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ est donc la densité surfacique de flux radiatif à travers une surface de normale \mathbf{n} , toujours pour les photons se propageant dans la direction $\boldsymbol{\omega}$. Et en intégrant sur toutes les directions $\boldsymbol{\omega}$, on obtient bien que $\int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} L_\nu \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ est la densité surfacique de flux radiatif à travers une surface de normale \mathbf{n} en comptant tous les photons, indépendamment de leur direction de propagation. En conclusion

- G_ν s’interprète facilement comme une densité de photon (ou une densité d’énergie radiative) en partant de la fonction de distribution f_ν ;
- $\mathbf{j}_{R,\nu}$ s’interprète facilement comme une densité surfacique de flux en partant de la luminance L_ν .

Nous venons de discuter deux descripteurs macroscopiques qui correspondent à une intégration des descripteurs mésoscopiques sur l’espace des directions : l’irradiance est le moment d’ordre 0 de la distribution angulaire de la luminance et le vecteur densité surfacique de flux est son moment d’ordre 1. Cette prise de moyenne entraîne la perte d’une partie importante de l’information sur les directions de propagation mais elle ramène le problème à un nombre de dimensions plus simple à penser et à résoudre (formellement ou numériquement).

De plus, avec les concepts de densité et de vecteur densité surfacique de flux, on retrouve un pan important de la pratique de l'ingénieur, notamment en ce qui concerne la dynamique des fluides. Mais pour pouvoir nous ramener à une pratique similaire et donc travailler seulement avec G_ν et $\mathbf{j}_{R,\nu}$ (ne plus chercher à caractériser L_ν dans toute sa dépendance angulaire), il faut que nous disposions d'un jeu d'équations fermé portant sur G_ν et $\mathbf{j}_{R,\nu}$ (ou impliquant des moments d'ordres plus élevés si besoin) qui serait l'équivalent des équations de Navier-Stokes-Fourier en dynamique des fluides. Une telle approche est possible et nous en donnerons des exemples au paragraphe 3 avec l'approximation de diffusion et l'approximation de Rosseland. Mais les raisonnements correspondants sont construits autour d'images de proche équilibre, et alors qu'en mécanique des fluides les nombres de Knudsen sont en général suffisamment faibles pour que ces raisonnements soient pertinents, il est fréquent que cela ne soit pas le cas en transfert radiatif : le libre parcours moyen des photons est souvent de l'ordre de la dimension caractéristique du système. Le plus souvent, nous chercherons donc à caractériser L_ν dans toute sa dépendance angulaire, ce qui sera l'objet de l'équation de transfert radiatif.

Nous venons d'aborder la question de l'intégration angulaire. Dans le même esprit d'une réduction de l'information, L_ν , G_ν et $\mathbf{j}_{R,\nu}$ étant des grandeurs énergétiques, on peut les intégrer fréquemment sur une gamme spectrale donnée. On obtient alors les grandeurs suivantes, notées sans indice fréquentiel : la luminance, l'irradiance et le vecteurs densité surfacique de flux intégrés sur la gamme $[\nu_{min}, \nu_{max}]$:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t) = \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} d\nu L_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t) \quad (6)$$

$$G(\mathbf{x}, t) = \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} d\nu G_\nu(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} d\nu \mathbf{j}_\nu(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

1.2 Forme locale (ou différentielle) de l'équation de transfert radiatif

Considérons l'équation de transfert radiatif dans un milieu d'indice de réfraction uniforme, en régime stationnaire¹. Il s'agit de l'équation intégral-différentielle régissant l'évolution

1. Certaines applications nécessitent de rester en instationnaire comme dans les applications biomédicales faisant appel à des lasers pulsés

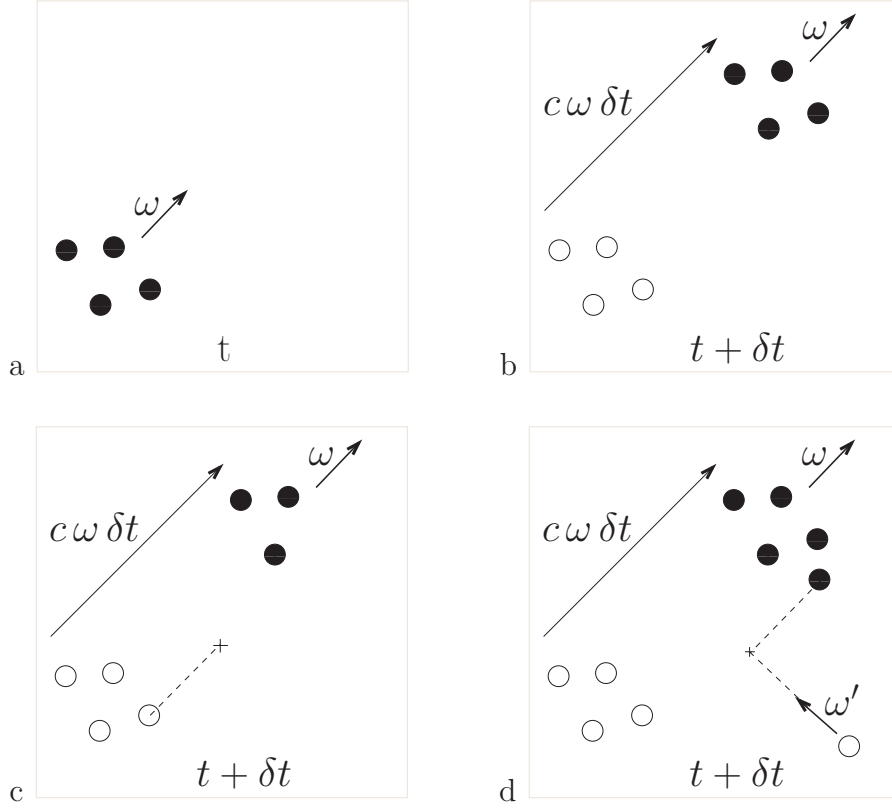


FIGURE 2: Représentation schématique de quelques photons à deux instants proches et interprétation physique des termes de l'équation de transfert radiatif. a & b : Terme de transport pur. c : Terme puits par absorption ou diffusion. d : Terme source par diffusion.

de la fonction de distribution f_ν :

$$c \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}_x f_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = -c \kappa_{e,\nu} f_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) + c (1 - \alpha_{s,\nu}) \kappa_{e,\nu} f^0(\mathbf{x}) + c \alpha_{s,\nu} \kappa_{e,\nu} \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega}' f_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}') p_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}') \quad (9)$$

avec $\kappa_{e,\nu}$ le coefficient d'extinction du milieu, $\kappa_{e,\nu} = \kappa_{a,\nu} + \kappa_{d,\nu}$ où $\kappa_{a,\nu}$ et $\kappa_{d,\nu}$ sont respectivement les coefficients d'absorption et de diffusion, $\alpha_{s,\nu}$ est l'albédo de diffusion simple $\alpha_{s,\nu} \kappa_{e,\nu} = \kappa_{d,\nu}$, $f^0(\mathbf{x})$ la luminance d'équilibre, $p_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}')$ est la fonction de phase et \mathbf{grad}_x est le gradient par rapport à la variable position.

Nous donnons dans les quelques lignes qui suivent une description intuitive des termes qui composent cette équation. Pour cela nous allons suivre par la pensée la propagation d'un ensemble de photons. Il s'agit des photons de fréquence ν , à $d\nu$ près, contenus dans l'élément $d\mathbf{x}d\boldsymbol{\omega}$ autour de $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$. Leur nombre est $f_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})d\mathbf{x}d\boldsymbol{\omega}d\nu$. Nous allons les suivre au cours

d'un intervalle de temps δt , comme représenté sur la figure 2.

Terme de transport pur $c\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} f_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$. Il indique la variation de f du simple fait du déplacement libre des photons. Tous les photons situés en \mathbf{x} à l'instant t ont une vitesse $c\boldsymbol{\omega}$. En l'absence de perturbation, ils se "transportent" durant δt jusqu'au point $\mathbf{x} + c\boldsymbol{\omega}\delta t$. D'après le théorème de Liouville, le volume de l'espace des phases $d\mathbf{x}d\boldsymbol{\omega}$ occupé par les photons est conservé au cours de ce déplacement et on a :

$$f_{\nu}(\mathbf{x} + c\boldsymbol{\omega}\delta t, \boldsymbol{\omega}) = f_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \quad (10)$$

Si δt est un élément différentiel en temps, $f_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ peut être exprimé comme son développement limité au premier ordre autour de la position d'origine, ce qui donne :

$$f_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) + [c\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} f_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})] \delta t = f_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \quad (11)$$

d'où

$$c\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} f_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (12)$$

Si l'on projette le gradient sur la demi-droite $\mathbf{x} + s\boldsymbol{\omega}$ le long de laquelle les photons se propagent, $s \in [0, \infty]$ étant l'abscisse curviligne correspondante, ce terme s'écrit :

$$c \partial_s f_{\nu}(\mathbf{x} + s\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (13)$$

Cette équation indique qu'en l'absence de diffusion et d'absorption, f est constant le long du chemin que suivent les photons.

Terme puits $-c\kappa_{e,\nu} f_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$. Il représente le taux statistique avec lequel les photons subissent une absorption ou une diffusion qui change leur direction de propagation. Ils "disparaissent" ainsi de l'élément de volume $d\mathbf{x}d\boldsymbol{\omega}$ considéré (voir Fig. 2.c). Cette écriture linéaire suppose qu'il existe toujours une échelle en dessous de laquelle les lieux d'interactions avec les diffuseurs sont distribués uniformément et de manière aléatoire. En ne considérant que le terme de transport projeté sur la direction de propagation ainsi que le terme puits, l'équation de transfert radiatif s'écrit $c \partial_s f_{\nu}(\mathbf{x} + s\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) = -c\kappa_{e,\nu} f_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ et on obtient l'atténuation exponentielle

$$f_{\nu}(\mathbf{x} + s\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \propto \exp(-\kappa_{e,\nu}s) \quad (14)$$

qui sera justifiée par *l'absence de mémoire* à la section suivante².

2. La démarche inverse est usuellement choisie dans les ouvrages de transfert radiatif : l'atténuation exponentielle est d'abord justifiée par l'absence de mémoire, puis mise en relation avec le terme puits de la forme locale de l'équation de transfert radiatif.

Termes sources

— Par diffusion : $c \alpha_{s,\nu} \kappa_{e,\nu} \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega}' f_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}') p_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}')$.

Il représente l'arrivée de photons dans le volume $d\mathbf{x}d\boldsymbol{\omega}$ de l'espace des phases suite à une diffusion vers $\boldsymbol{\omega}$ dans $d\mathbf{x}$ (voir Fig. 2.d). $c \alpha_{s,\nu} \kappa_{e,\nu} f_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}')$ est le nombre de photons par unité de temps qui, se propageant dans la direction $\boldsymbol{\omega}'$ dans $d\mathbf{x}$, subissent une diffusion, et $p_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}')$ est la probabilité qu'une telle diffusion mène à l'apparition d'un photon dans la direction $\boldsymbol{\omega}$. L'intégrale sur l'angle solide total permet de tenir compte des photons venant de toutes les directions.

— Par émission : $c(1 - \alpha_{s,\nu}) \kappa_{e,\nu} f^0$.

Il représente les photons émis au point dans la direction considérée. En toute généralité, ce terme devrait dépendre de tout le détail de l'état microscopique du milieu au point (par exemple de l'ensemble de la distribution des états moléculaires dans le cas d'un gaz). Mais lorsqu'aucune mention contraire n'est faite, l'équation de transfert radiatif est construite en admettant que la matière est localement dans un état proche de l'équilibre thermodynamique. Sous cette hypothèse, la source par émission ne dépend que des variables d'état thermodynamiques usuelles (à travers leur influence sur $\alpha_{s,\nu}$, $\kappa_{e,\nu}$ et f^0 .) La démonstration qui conduit à l'expression $c(1 - \alpha_{s,\nu}) \kappa_{e,\nu} f^0$ est la suivante :

1. A l'équilibre f^0 est solution de l'équation de transfert radiatif.
2. f^0 annule les termes diffusifs (la source par diffusion compense la disparition par diffusion du fait des propriétés de réciprocity de la fonction de phase).
3. Donc à l'équilibre la source par émission est égale à la disparition par absorption, ce qui conduit bien à $c(1 - \alpha_{s,\nu}) \kappa_{e,\nu} f^0$.
4. En dehors de l'équilibre, mais sous l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local, en chaque point l'état microscopique de la matière est supposé être proche de l'état d'équilibre correspondant aux variables d'état thermodynamiques observées localement. Ainsi, les transitions d'état conduisant à l'émission de photons sont les mêmes que celles que l'on observerait à l'équilibre. Donc le terme source par émission conserve l'expression trouvée dans le cas de l'équilibre.

L'équation de transfert radiatif sur la luminance sachant que $L_\nu = h\nu c f_\nu$ et $L_\nu^0 = h\nu c f_\nu^0$, s'écrit :

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} L_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = (1 - \alpha_{s,\nu}) \kappa_{e,\nu} L_{\nu}^0(\mathbf{x}) - \kappa_{e,\nu} L_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) + \alpha_{s,\nu} \kappa_{e,\nu} \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega}' L_{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}') p_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}') \quad (15)$$

Pour résoudre l'ETR, il faut définir les conditions aux limites. Cela consiste à donner l'information sur la luminance en tout point de la surface pour toutes les directions entrantes dans le domaine d'étude. Ainsi, en tout point de la frontière du domaine d'étude, soit la luminance est connue soit elle est reliée à la luminance des directions sortantes en présence de réflexions.

1.3 Construction de la forme intégrale de l'équation de transfert radiatif à partir de la statistique du transport corpusculaire.

Il existe toujours une expression intégrale équivalente à l'équation de transfert radiatif locale associée à ses conditions aux limites [2]. Il s'agit d'une formulation intégrale de la solution du problème. Nous ne démontrons pas ici de manière formelle et générale cette équivalence. Nous nous concentrons dans la suite sur les images statistiques qui permettent de construire de telles formulations intégrales en se basant sur des phénomènes intuitifs de la physique corpusculaire tels que l'absorption et la diffusion des photons. Cet exercice est très utile à la compréhension des phénomènes mis en jeu dans les systèmes à étudier. Cela permet de se projeter dans l'espace des chemins optiques, c'est-à-dire l'ensemble des trajectoires de diffusions multiples empruntées par les photons dans le milieu participant. De plus, la formulation intégrale a une place centrale de par sa cohérence avec la méthode de Monte Carlo (voir la Sec. 4). Cependant, nous souhaitons ici mettre l'accent sur les images physiques et l'ensemble de ce paragraphe peut être lu sans attacher une importance centrale aux expressions mathématiques (même si ces formulations sont des outils précieux pour une analyse concrète du système). Dans ce cadre, la formulation intégrale peut être vue comme un moyen pratique d'établir de manière formelle des équivalences entre différentes interprétations du problème de transport.

Statistique corpusculaire de l'absorption et absence de mémoire. Dans un premier temps, intéressons nous à la transmittivité T d'une lame contenant une suspension de particules diffusantes telles que représentées Fig. 3.a . En l'absence de réflexion aux parois \mathcal{R} et \mathcal{F} , cela correspond à la proportion des photons incidents à la surface \mathcal{F} qui arrivent à l'arrière de la lame, en $z = E$. D'un point de vue statistique, T est la probabilité qu'un photon partant de \mathcal{F} arrive en $z = E$. Nous considérons ici dans notre exemple une incidence collimatée.

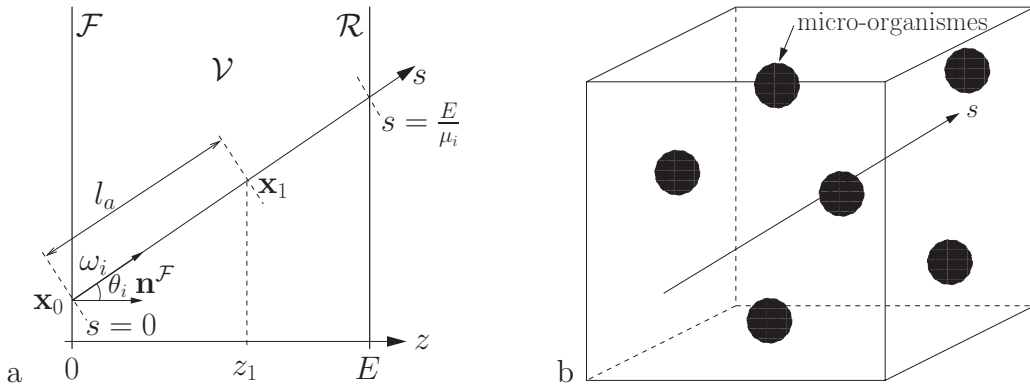


FIGURE 3: Chemin optique des photons en l'absence de diffusion. a : Demi-droite $\mathbf{x}_0 + s \boldsymbol{\omega}_i$ d'abscisse curviligne $s \in [0, \infty]$. b. Propagation des photons sur leur chemin optique dans un milieu contenant des particules diffusantes.

Travaillons pour commencer avec un modèle d'absorption pure. Dans cette situation, le rayonnement récupéré à l'arrière de la lame est tout simplement la luminance $L_0 = \frac{q_0}{\mu_i}$ (L_0 est la luminance en $Z=0$) incidente en \mathcal{F} atténuée exponentiellement sur la longueur de traversée $\frac{E}{\mu_i}$ du milieu, où μ_i est le cosinus de l'angle d'incidence θ_i (voir Fig. 3.a). La transmittivité s'écrit :

$$T = \frac{L(z = E, \boldsymbol{\omega}_i)}{L_0} = \exp\left(-\kappa_a \frac{E}{\mu_i}\right) \quad (16)$$

car κ_a est homogène dans la configuration radiative étudiée, κ_a étant le coefficient d'absorption du milieu. Ce résultat très intuitif implique un certain nombre d'hypothèses sur le comportement individuel des photons, notamment l'absence de mémoire.

Encart 1 INTERPRÉTATION TEMPORELLE DE L'ABSENCE DE MÉMOIRE *Faisons une expérience mentale dans laquelle N_0 photons sont émis simultanément à l'instant $t = 0$ en un point \mathbf{x}_0 de \mathcal{F} ($z_0 = 0$). Ces photons se propagent sur la demi-droite définie par \mathbf{x}_0 et la direction $\boldsymbol{\omega}_i$ (voir Fig. 3) et nous suivons l'évolution de leur nombre $N(t)$ au cours du temps. L'absence de mémoire signifie que les photons interagissent localement avec les particules indépendamment de leur histoire. En d'autres termes, la décroissance du nombre de photons par absorption à l'instant t ne dépend pas des instants précédents, et la disparition locale ne dépend donc que de la proportion restante, puisque chacun des photons interagit de manière identique avec les particules et indépendamment du nombre de photons (les photons n'interagissent pas mutuellement et les propriétés radiatives des particules sont*

indépendantes du nombre de photons qui sont en train d'interagir avec eux). Le nombre de photons $N(t)$ évolue comme :

$$d_t N(t) = -\frac{1}{\tau_a} N(t) \quad (17)$$

où $d_t N(t)$ est la dérivée temporelle de N à l'instant t et τ_a est le libre temps moyen d'absorption, c'est-à-dire le temps caractéristique pour qu'un photon se propageant à la vitesse c soit absorbé par le milieu (le milieu étant homogène, τ_a est indépendant de la position). $\frac{1}{\tau_a}$ est le taux statistique d'absorption des photons qui s'écrit aussi $\frac{1}{\tau_a} = c \kappa_a$ (voir le terme puits de l'équation de transfert radiatif dans la section précédente). Le coefficient d'absorption κ_a quantifie l'occurrence avec laquelle un photon se propageant en ligne droite dans le volume réactionnel rencontre une particule diffusante par une unité de longueur parcourue sur son abscisse curviligne s (voir Fig. 3.b). Puisque le photon se propage en ligne droite, il ne perçoit que la section des diffuseurs et non leur volume. Si l'interaction était de nature matérielle, la section géométrique des particules diffusantes serait considérée. Ici l'interaction est de nature électromagnétique et la section efficace s'obtient via les équations de l'électromagnétisme (Maxwell). Le coefficient d'absorption s'exprime comme la densité de sections efficaces σ_a dans le volume réactionnel :

$$\kappa_a = C_x \sigma_a \quad (18)$$

où C_x est la concentration en diffuseurs (le nombre de diffuseurs par unité de volume). Les N photons que nous suivons se propagent tous avec la vitesse c suivant la direction ω_i , leur abscisse z_1 évolue au cours de temps comme $z_1(t) = \mu_i c t$. En changeant la variable temporelle par l'abscisse z_1 dans l'équation 17, on obtient

$$d_z N(z_1) = -\frac{\kappa_a}{\mu_i} N(z_1) \quad (19)$$

qui a pour solution $N(z_1) = N_0 \exp(-\kappa_a \frac{z_1}{\mu_i})$. On retrouve bien l'expression de la transmittivité

$$T = \frac{N(z_1 = E)}{N_0} = \exp(-\kappa_a \frac{E}{\mu_i}) \quad (20)$$

Afin d'appréhender cette atténuation exponentielle de manière statistique et d'aller vers la formulation intégrale de la transmittivité, faisons une expérience mentale dans laquelle un grand nombre de photons sont émis les uns après les autres de manière continue en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{F}$ suivant ω_i . La direction ω_i et l'origine \mathbf{x}_0 définissent la demi-droite sur laquelle se propagent

les photons : il s'agit du chemin optique qu'empruntent les photons. La probabilité qu'un photon émis en \mathbf{x}_0 parcourt une longueur l_1 dans le milieu sans être absorbé (c'est-à-dire la probabilité qu'il soit absorbé après avoir parcouru une distance supérieure l_1) est notée $P(l_1)$. La probabilité qu'un photon parcourt une longueur l_2 sans être absorbé, sachant qu'il a déjà parcouru une longueur l_1 depuis son émission en \mathbf{x}_0 , est notée $P(l_2|l_1)$. La probabilité qu'un photon parcourt une longueur supérieure à $l = l_1 + l_2$ est donc :

$$P(l_1 + l_2) = P(l_1)P(l_2|l_1) \quad (21)$$

On considère ici la position $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + l_1 \boldsymbol{\omega}_i$ comme une source secondaire dont l'émission correspond à la proportion de photons arrivant jusqu'en \mathbf{x}_1 , c'est-à-dire $P(l_1)$, puis partant de cette source secondaire, les photons ont une probabilité $P(l_2|l_1)$ d'arriver en $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + l_2 \boldsymbol{\omega}_i$. Dans cette expérience mentale, l'absence de mémoire se traduit par le fait que la probabilité $P(l_2|l_1)$ est indépendante de l_1 . En effet, un photon arrivant à la position \mathbf{x}_1 interagira par la suite avec le milieu exactement de la même manière qu'un photon qui serait émis en \mathbf{x}_1 . On a donc :

$$P(l_2|l_1) = P(l_2) \quad (22)$$

d'où

$$P(l_1 + l_2) = P(l_1)P(l_2) \quad (23)$$

Le milieu étant homogène, la seule forme pouvant satisfaire à cette relation est

$$P(l) = \exp(-\kappa_a l) \quad (24)$$

$P(l)$ est la probabilité qu'un photon soit absorbé par le milieu après avoir parcouru une distance supérieure l . C'est donc aussi la probabilité de ne pas avoir été absorbé par la colonne de longueur l : $P(E/\mu_i)$ est donc la transmittivité de la lame d'épaisseur E . Intéressons nous maintenant à la probabilité $p_{L_a}(l_a)dl_a$ qu'un photon soit absorbé dans le volume réactionnel après avoir parcouru une distance comprise entre l_a et $l_a + dl_a$. $p_{L_a}(l_a)$ est la densité de probabilité des longueurs d'absorption. Il s'agit, à un facteur près, de la distribution que l'on obtiendrait expérimentalement en notant pour chaque photon émis en \mathbf{x}_0 la longueur qu'il parcourt avant d'être absorbé. La probabilité $p_{L_a}(l_a)dl_a$ est égale à la probabilité $P(l_a)$ que le photon soit absorbé à une distance supérieure à l_a , moins la probabilité $P(l_a + dl_a)$ qu'il soit absorbé à une distance supérieure à $l_a + dl_a$:

$$p_{L_a}(l_a)dl_a = P(l_a) - P(l_a + dl_a) \quad (25)$$

dl_a étant un élément différentiel de longueur, $(P(l_a + dl_a) - P(l_a))/dl_a$ est la dérivée de $P(l)$ prise en l_a , notée ici $d_l P(l_a)$, et il vient :

$$p_{L_a}(l_a) = -d_l P(l_a) \quad (26)$$

En dérivant l'expression Eq. 24 de $P(l)$, on obtient la densité de probabilité des longueurs d'absorption :

$$p_{L_a}(l_a) = \kappa_a \exp(-\kappa_a l_a) \quad (27)$$

Cette densité de probabilité est normalisée, c'est-à-dire que la probabilité qu'un photon soit absorbé entre $l_a = 0$ et $l_a \rightarrow \infty$ est bien égale à 1 :

$$\int_0^{\infty} dl_a p_{L_a}(l_a) = 1 \quad (28)$$

La transmittivité de la lame d'épaisseur E (voir Fig. 3) est la probabilité qu'un photon ne soit toujours pas absorbé après avoir parcouru la distance E/μ_i :

$$T = P(E/\mu_i) = \int_{\frac{E}{\mu_i}}^{\infty} dl_a p_{L_a}(l_a) \quad (29)$$

Cette équation est la formulation intégrale de la transmittivité. Dans la suite de ce document, nous prendrons l'habitude de remplacer les bornes d'intégration par l'ajout d'une fonction échelon $H[\]$ dans l'intégrande des formulations intégrales. Cela donne ici :

$$T = \int_0^{\infty} dl_a p_{L_a}(l_a) H \left[l_a > \frac{E}{\mu_i} \right] \quad (30)$$

où $H[\]$ est égale à 1 si la condition entre crochets est satisfaite et égale à 0 sinon. De plus, si on travaille avec la position d'absorption \mathbf{x}_1 correspondant à la longueur d'absorption l_a : $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + l_a \boldsymbol{\omega}_i$ (voir Fig. 3.a), on peut réécrire la condition dans la fonction échelon Eq. 30 en fonction de l'abscisse z_1 de cette position d'absorption (z_1 est une fonction de l_a). Cela donne :

$$T = \int_0^{\infty} dl_a p_{L_a}(l_a) H [z_1 > E] \quad (31)$$

Cela revient bien à intégrer les longueurs d'absorption supérieures à $\frac{E}{\mu_i}$.

Cette expression a été obtenue par un raisonnement mathématique. Son interprétation sur les images de la statistique du transport corpusculaire est directe : sur l'ensemble des événements possibles, seuls les événements correspondant à une position d'absorption

en dehors de la lame sont considérés. Maintenant que nous disposons d'une expression mathématique qui est la traduction rigoureuse des phénomènes d'extinction, nous n'hésiterons pas à l'employer sans en démontrer à nouveau les fondements.

Chemins optiques de diffusion multiple. Considérons maintenant la diffusion. Exactement comme dans le cas de l'absorption, on définit le coefficient de diffusion $\kappa_d = C_x \sigma_d$, où σ_d est la section efficace de diffusion, et la densité de probabilité des longueurs de diffusions $p_{L_d}(l_d)$ est

$$p_{L_d}(l_d) = \kappa_d \exp(-\kappa_d l_d) \quad (32)$$

Le coefficient d'extinction est $\kappa_e = \kappa_a + \kappa_d$, et la densité de probabilité des longueurs d'extinction $p_{L_e}(l_e)$ est

$$p_{L_e}(l_e) = \kappa_e \exp(-\kappa_e l_e) \quad (33)$$

$p_{L_e}(l_e)$ est la densité de probabilité qu'un photon interagisse avec un diffuseur après avoir parcouru une longueur l_e dans le milieu, indépendamment de la nature de cette interaction (absorption ou diffusion). Lorsqu'une telle interaction se produit, la probabilité qu'il s'agisse d'une diffusion est l'albédo de diffusion simple $\alpha_s = \kappa_d/\kappa_e$, et la probabilité que l'interaction soit une absorption est son complémentaire $1 - \alpha_s$. Lorsqu'un photon est diffusé, sa direction de propagation est changée. Sachant qu'un photon arrivant avec une direction $\boldsymbol{\omega}_0$ est diffusé par un diffuseur, la densité de probabilité que ce photon soit diffusé suivant la direction $\boldsymbol{\omega}_1$ est donnée par la fonction de phase $p_{\Omega_1}(\boldsymbol{\omega}_1|\boldsymbol{\omega}_0)$. En d'autres termes $p_{\Omega_1}(\boldsymbol{\omega}_1|\boldsymbol{\omega}_0)d\boldsymbol{\omega}_1$ est la probabilité que le photon reparte avec une direction comprise dans $d\boldsymbol{\omega}_1$ autour de $\boldsymbol{\omega}_1$.

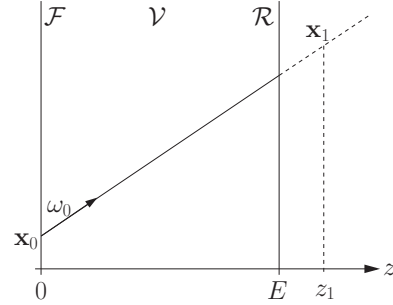
Dans le cas de l'absorption pure, les photons n'empruntaient qu'un seul chemin optique puisque nous considérons une source collimatée. En présence de diffusion, un photon peut être transmis en empruntant différents chemins optiques : ce sont les chemins de diffusion multiple correspondant à 0, 1, 2, 3... diffusions dans le milieu avant l'arrivée en $z = E$. Nous allons dans la suite détailler ces chemins optiques en suivant la propagation des photons dans le milieu participant. Nous adoptons une organisation d'écriture permettant deux niveaux de lecture : les événements statistiques correspondant au transport des photons sont énoncés point par point et accompagnés d'une figure représentant un des chemins optiques correspondant à cet événement, puis l'expression intégrale de la probabilité de l'événement est donnée en dessous. Nous reprenons pour cela l'expérience mentale où les photons sont émis les uns après les autres depuis \mathbf{x}_0 , leur direction de départ étant ici notée $\boldsymbol{\omega}_0$. La transmittivité est la probabilité qu'un photon arrive en $z = E$. Elle peut s'écrire comme la somme des probabilités des événements correspondant à une transmission après 0, 1, 2, 3... diffusions

dans le milieu. On note $T^{(0)}$ la probabilité qu'un photon traverse la lame directement, sans interagir avec les diffuseurs. $T^{(1)}$ est la probabilité qu'un photon sorte en $z = E$ après avoir vécu une diffusion, $T^{(2)}$ après deux diffusions, et ainsi de suite. T s'écrit donc :

$$T = T^{(0)} + T^{(1)} + T^{(2)} + \dots \quad (34)$$

Le premier terme $T^{(0)}$ est calculé simplement par atténuation exponentielle selon le coefficient d'extinction. Les photons qui sortent de ce faisceau direct par diffusion ne sont pas pour autant perdus, ils participent aux termes d'ordres supérieurs $T^{(j>0)}$. $T^{(0)}$ représente l'événement statistique suivant :

- Un photon est transmis directement sans interagir avec le milieu. Il participe à la transmittivité et le chemin optique correspondant est une ligne droite identique à celle observée dans le cas de l'absorption. La probabilité de cet événement est :



$$\int_0^{\infty} dl_{e,0} p_{L_{e,0}}(l_{e,0}) H[z_1 > E] \quad (35)$$

où z_1 est l'abscisse du premier point d'interaction $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + l_{e,0} \boldsymbol{\omega}_0$. $T^{(0)}$ s'écrit donc :

$$T^{(0)} = \int_0^{\infty} dl_{e,0} p_{L_{e,0}}(l_{e,0}) H[z_1 > E] \quad (36)$$

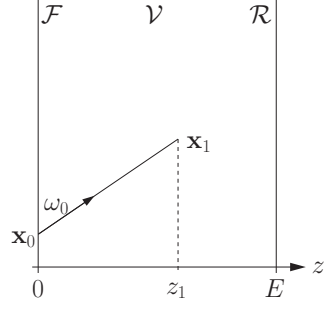
Considérons maintenant l'ensemble des événements pouvant se produire lorsqu'un photon interagit une première fois avec le volume réactionnel.

- Un photon interagit dans le milieu à une position \mathbf{x}_1 après avoir parcouru une première longueur d'extinction $l_{e,0}$ (toutes les positions $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{V}$ sont envisagées). La probabilité de cet événement est :

$$\int_0^{\infty} dl_{e,0} p_{L_{e,0}}(l_{e,0}) H[0 < z_1 < E] \quad (37)$$

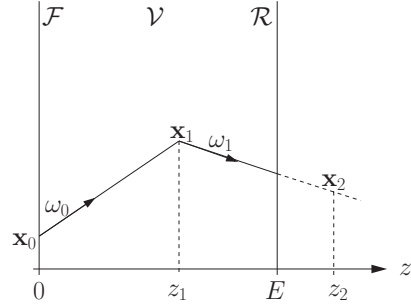
Lorsque cela se produit, il y a quatre cas de figures : le photon est absorbé, le photon est diffusé et sort de la lame par la face avant, le photon est diffusé et sort de la lame par la face arrière (transmission) et enfin, le photon est diffusé et interagit à nouveau avec le milieu, il participe aux ordres supérieurs $T^{(j>1)}$. Ces événements sont détaillés dans la suite :

- (1) L'interaction en \mathbf{x}_1 est une absorption, le photon est perdu et ne participe pas à la transmittivité. La probabilité de cet événement est :



$$\int_0^\infty dl_{e,0} p_{L_{e,0}}(l_{e,0}) H [0 < z_1 < E] (1 - \alpha_s) \quad (38)$$

- (2) L'interaction en \mathbf{x}_1 est une diffusion. Le photon repart suivant une direction de diffusion ω_1 et il est transmis. La probabilité de cet événement est :

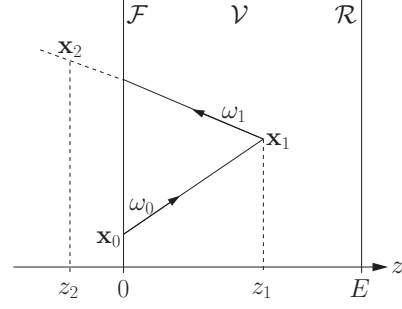


$$\int_0^\infty dl_{e,0} p_{L_{e,0}}(l_{e,0}) H [0 < z_1 < E] \alpha_s \quad (39)$$

$$\times \int_{4\pi} d\omega_1 p_{\Omega_1}(\omega_1 | \omega_0) \int_0^\infty dl_{e,1} p_{L_{e,1}}(l_{e,1}) H [z_2 > E]$$

où z_2 est l'abscisse du second point d'interaction $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + l_{e,1} \omega_1$. Comme cela a été mentionné dans le cadre de l'absorption, du fait de l'absence de mémoire le point de diffusion \mathbf{x}_1 peut être vu comme une source secondaire dont l'émission correspond aux photons diffusés en \mathbf{x}_1 , c'est-à-dire $\int_0^\infty dl_{e,0} p_{L_{e,0}}(l_{e,0}) H [0 < z_1 < E] \alpha_s$. Les photons partent de cette source secondaire avec une distribution angulaire correspondant à la fonction de phase. Partant de la position \mathbf{x}_1 suivant la direction ω_1 , la probabilité qu'un photon soit transmis est $\int_0^\infty dl_{e,1} p_{L_{e,1}}(l_{e,1}) H [z_2 > E]$, où z_2 est une fonction de \mathbf{x}_1 et $l_{e,1}$, exactement comme si nous considérons une transmission directe à partir de la position \mathbf{x}_1 .

- (3) L'interaction en \mathbf{x}_1 est une diffusion. Le photon repart suivant une direction de diffusion ω_1 et il sort de la lame par la face avant, en $z = 0$. Cet événement ne participe pas à la transmittivité et sa probabilité est :



$$\int_0^\infty dl_{e,0} p_{L_{e,0}}(l_{e,0}) H [0 < z_1 < E] \alpha_s$$

$$\times \int_{4\pi} d\omega_1 p_{\Omega_1}(\omega_1|\omega_0) \int_0^\infty dl_{e,1} p_{L_{e,1}}(l_{e,1}) H [z_2 < 0]$$
(40)

- (4) L'interaction en \mathbf{x}_1 est une diffusion. Le photon repart suivant une direction de diffusion ω_1 et il interagit à nouveau dans le volume réactionnel en \mathbf{x}_2 . Nous retrouverons cet événement plus tard. Sa probabilité est :

$$\int_0^\infty dl_{e,0} p_{L_{e,0}}(l_{e,0}) H [0 < z_1 < E] \alpha_s$$

$$\times \int_{4\pi} d\omega_1 p_{\Omega_1}(\omega_1|\omega_0) \int_0^\infty dl_{e,1} p_{L_{e,1}}(l_{e,1}) H [0 < z_2 < E]$$
(41)

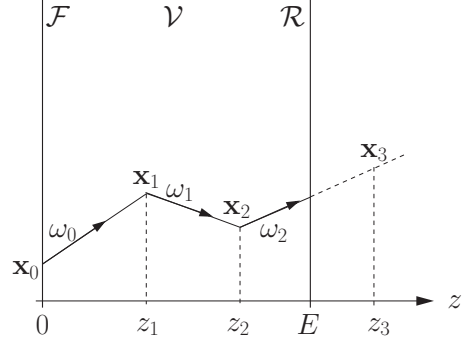
Seul l'événement (2) participe à la transmission après une diffusion $T^{(1)}$ et on obtient :

$$T^{(1)} = \int_0^\infty dl_{e,0} p_{L_{e,0}}(l_{e,0}) H [0 < z_1 < E] \alpha_s$$

$$\times \int_{4\pi} d\omega_1 p_{\Omega_1}(\omega_1|\omega_0) \int_0^\infty dl_{e,1} p_{L_{e,1}}(l_{e,1}) H [z_2 > E]$$
(42)

A partir de l'événement (4), le processus d'interaction se reproduit à l'identique de manière infinie. Comme dans le cas de l'interaction en \mathbf{x}_1 , l'interaction en \mathbf{x}_2 peut être soit une absorption, soit une diffusion. Si cette interaction est une diffusion, trois événements sont à nouveau possibles : la transmission, le retour en $z = 0$ et une nouvelle diffusion en \mathbf{x}_3 .

- L'événement participant à la transmission après deux diffusions est : un photon interagit dans le milieu à une position \mathbf{x}_1 , cette interaction est une diffusion, le photon repart avec la direction de diffusion ω_1 , il interagit à nouveau dans le milieu en \mathbf{x}_2 , il repart avec la direction de diffusion ω_2 et est transmis. $T^{(2)}$ se construit à l'identique de $T^{(1)}$ en considérant un ordre de diffusion supplémentaire :



$$\begin{aligned}
T^{(2)} = & \int_0^\infty dl_{e,0} p_{L_{e,0}}(l_{e,0}) H[0 < z_1 < E] \alpha_s \\
& \times \int_{4\pi} d\omega_1 p_{\Omega_1}(\omega_1|\omega_0) \int_0^\infty dl_{e,1} p_{L_{e,1}}(l_{e,1}) H[0 < z_2 < E] \alpha_s \\
& \times \int_{4\pi} d\omega_2 p_{\Omega_2}(\omega_2|\omega_1) \int_0^\infty dl_{e,2} p_{L_{e,2}}(l_{e,2}) H[z_3 > E]
\end{aligned} \quad (43)$$

La formulation intégrale de T est obtenue en prenant la somme à l'infinie des $T^{(j)}$. Elle s'écrit de manière compacte sous forme récursive :

$$T = \int_0^\infty dl_{e,0} p_{L_{e,0}}(l_{e,0}) \{H[z_1 > E] \times 1 + H[0 < z_1 < E] \alpha_s \mathcal{T}_1\} \quad (44)$$

avec \mathcal{T}_j défini de manière récursive comme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{j \geq 1} = & \int_{4\pi} d\omega_j p_{\Omega_j}(\omega_j|\omega_{j-1}) \int_0^\infty dl_{e,j} p_{L_{e,j}}(l_{e,j}) \\
& \times \{H[z_{j+1} > E] \times 1 + H[0 < z_{j+1} < E] \alpha_s \mathcal{T}_{j+1}\}
\end{aligned} \quad (45)$$

La formulation intégrale peut être lue comme une formalisation de l'interprétation du transfert radiatif en terme de chemins optiques. Dans ce contexte, elle consiste en l'intégration des contributions de tous les chemins optiques participant à la grandeur radiative étudiée. L'espace des chemins optiques peut varier en fonction des images physiques employées à l'échelle corpusculaire. La description précédente était dictée par le choix d'un raisonnement

sur notre expérience mentale dans laquelle les photons sont émis un par un. Le fait de considérer un photon et non un ensemble de photons nous a menés dans un espace où certains chemins optiques s'interrompent dans le volume réactionnel de par une absorption par un diffuseur. De manière équivalente, on peut considérer un espace des chemins optiques défini par un ensemble de positions de diffusion, plutôt qu'un ensemble de positions d'interaction. Dans ce cas, on travaille avec la densité de probabilité des longueurs de diffusion (au lieu des longueurs d'extinction) et tous les chemins mènent à une sortie du volume réactionnel, soit en $z = 0$ soit en $z = E$: aucun chemin n'est interrompu par absorption mais il y a atténuation le long du chemin. L'expérience mentale de l'encart 1, dans laquelle N_0 photons sont émis simultanément, peut alors être employée. Cet ensemble de photons se propage suivant un chemin optique et au cours de leur propagation leur nombre décroît exponentiellement par absorption, comme cela a été décrit en l'absence de diffusion. La contribution de ce chemin est donc pondérée par la transmission en absorption $\exp(-\kappa_a d)$ où d est la longueur du chemin optique. On obtient la formulation intégrale suivante :

$$T = \int_0^\infty dl_{d,0} p_{L_{d,0}}(l_{d,0}) \{H[z_1 > E] \exp(-\kappa_a d_0) + H[0 < z_1 < E] \mathcal{T}_1\} \quad (46)$$

avec \mathcal{T}_j défini de manière récursive comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{j \geq 1} = & \int_{4\pi} d\omega_j p_{\Omega_j}(\omega_j | \omega_{j-1}) \int_0^\infty dl_{d,j} p_{L_{d,j}}(l_{d,j}) \\ & \times \{H[z_{j+1} > E] \exp(-\kappa_a d_j) + H[0 < z_{j+1} < E] \mathcal{T}_{j+1}\} \end{aligned} \quad (47)$$

où d_j est la longueur du chemin optique correspondant à une sortie du milieu avant d'atteindre la position de diffusion \mathbf{x}_{j+1} (qui est à l'extérieur du volume réactionnel comme dans la discussion précédente). Dans le cas du chemin correspondant à une transmission directe, $d_0 = \frac{E}{\mu_i}$ comme dans notre étude en l'absence de diffusion. On montre facilement que cette formulation intégrale est mathématiquement équivalente à la formulation Eqs. 44 et 45. Pour cela il faut remarquer que $dl_e p_{L_e}(l_e) \alpha_s = dl_e \kappa_e \exp(-\kappa_e l_e) \frac{\kappa_d}{\kappa_e} = dl_e \kappa_d \exp(-\kappa_d l_e) \exp(-\kappa_a l_e)$. En changeant la variable muette l_e pour l_d on obtient $dl_e p_{L_e}(l_e) \alpha_s = dl_d p_{L_d}(l_d) \exp(-\kappa_a l_d)$. On voit ainsi apparaître la densité de probabilité des longueurs de diffusion $p_{L_d}(l_d)$ et l'atténuation exponentielle par absorption sur chaque segment de longueur l_d composant le chemin optique.

1.4 La pertinence de ce choix de modélisation

Nous venons de proposer des solutions formelles exactes de l'ETR. Ces solutions sont de forme intégrale et la brique de base de l'intégrande est systématiquement la loi d'atténuation exponentielle de Beer (ou la distribution exponentielle des libres parcours). Inversement, on peut retenir que cette atténuation exponentielle est la première des conditions à vérifier lorsqu'on se pose la question de la pertinence de l'ETR dans un contexte donné.

Nous ne prétendons pas répondre ici à la question des conditions de validité de l'ETR : d'une part, le sens de cette question est discutable et d'autre part, dans les contextes de modélisation plus précisément définis ou cette question aurait du sens (par exemple lors de certains passages du corpus de l'électromagnétisme à celui du transfert radiatif), elle reste aujourd'hui très ouverte. Donc, essentiellement, l'ETR est un choix de modélisation pertinent dès lors que l'on observe qu'il l'est ... Cependant, tout physicien du rayonnement a en tête quelques cas particuliers emblématiques des succès de l'ETR. Nous en donnons ici quelques-uns.

Le vide ou les milieux transparents Si on en juge par le nombre d'études du transfert radiatif, ce cas très particulier n'est pas le moindre. Il n'y a pas d'atténuation, le coefficient d'extinction κ_e est nul et la loi d'extinction exponentielle de Beer est bien vérifiée.

Un milieu matériel linéaire isotrope homogène non magnétique Une solution des équations de Maxwell macroscopiques dans un tel milieu (caractérisé par un indice de réfraction complexe $m = n - ik$) est l'onde plane

$$E(z) \propto \exp(-i 2\pi/\lambda m z) = \exp(-2\pi/\lambda k z) \exp(-i 2\pi/\lambda n z)$$

avec λ la longueur d'onde et z la distance parcourue dans le milieu. La puissance électromagnétique véhiculée par l'onde plane est donnée par la norme du vecteur de Poynting, qui est ici proportionnelle au module carré $|E|^2 \propto \exp(-4\pi/\lambda k z)$. Nous retrouvons la loi d'atténuation exponentielle de Beer, avec un coefficient d'absorption $\kappa_a = 4\pi/\lambda k$. Cela inclut le vide ($m = 1$) et la transparence ($k = 0$).

Une distribution aléatoire de diffuseurs indépendants On considère un grand ensemble de diffuseurs distribués aléatoirement dans l'espace et séparés par un milieu du même type que celui que nous venons de décrire (milieu matériel linéaire isotrope homogène non

magnétique). La distribution de ces diffuseurs est uniforme et on admet de plus qu'ils sont suffisamment éloignés les uns des autres (et de toute source radiative) de façon à ce que

- les champs électromagnétiques incidents sur ces diffuseurs (champs émis à la source ou précédemment diffusés) puissent être assimilés à des ondes planes,
- l'interaction entre une onde plane et un diffuseur puisse être considérée indépendante de la présence des autres diffuseurs (leur position, leur fraction volumique ...).

A ce stade, on rajoute une autre hypothèse : pour caractériser l'interaction entre une onde plane et un diffuseur, il suffit de faire appel au corpus de l'électromagnétisme des milieux matériels dont les résultats se synthétisent sous la forme d'une section efficace et d'une section efficace différentielle. Nous ne chercherons pas ici à les définir complètement, mais on retiendra que

- le rapport entre la section efficace différentielle et la section efficace est la fonction de phase ;
- la section efficace sera multipliée par la densité de diffuseurs pour donner le coefficient d'extinction (sans oublier de rajouter le coefficient d'absorption du milieu séparant les diffuseurs s'il n'est pas transparent).

La section efficace est homogène à une surface. Elle s'interprète comme une surface interceptant le rayonnement incident. Pour une onde plane incidente, l'ensemble des diffuseurs est alors vu comme une distribution dans l'espace d'un grand ensemble de surfaces interceptant l'énergie radiative incidente. Le coefficient d'extinction correspondant est une densité volumique de surface d'interception : un nombre, par m^3 , de m^2 interceptant l'énergie incidente (i.e. absorbant cette énergie ou la diffusant).

Un gaz dilué Pour un gaz de molécules suffisamment éloignées les unes des autres, le raisonnement est identique à celui qui précède. Comme pour les diffuseurs, l'interaction du rayonnement avec chaque molécule est synthétisée à l'aide d'une section efficace que l'on multiplie par la densité moléculaire pour obtenir le coefficient d'extinction du gaz. La seule différence réside dans le corpus scientifique auquel on fait appel pour obtenir la section efficace : pour l'absorption moléculaire, on fait appel à une physique quantique, la spectroscopie moléculaire, de façon à capturer les effets liés à la quantification des états de rotation et de vibration de la molécule. Le corpus est différent, mais pour le physicien du transfert radiatif l'image résultante est la même : un grand nombre d'objets distribués aléatoirement dans le volume et interagissant avec le rayonnement de façon indépendante. Il sera notamment très facile de penser le transfert de rayonnement dans un milieu où des diffuseurs sont entourés d'un gaz moléculaire : deux types de sections efficaces seront à prendre en compte conjointement ce qui se traduira simplement par l'addition des deux coefficients d'extinction.

Une difficulté apparaîtra néanmoins lors de l'intégration fréquentielle car les dépendances fréquentielles de ces deux familles de sections efficaces sont souvent très différentes : à faible pression, les gaz ont des spectres d'absorption composés de raies très marquées, qui sont la signature des effets quantiques, alors que pour les diffuseurs rien d'équivalent ne ressort de la résolution des équations de l'électromagnétisme des milieux matériels, les variations fréquentielles des coefficients d'absorption et de diffusion étant beaucoup plus régulières.

2 Epaisseurs optiques et invariance d'échelle du transport

Nous introduisons dans cette section un ensemble de grandeurs sans dimensions couramment utilisées pour caractériser une configuration radiative donnée. Ces grandeurs ont une place centrale dans la construction d'un intuitif autour du transfert radiatif. En fonction de la valeur de l'albédo α_s , du paramètre d'asymétrie g de la fonction de phase et de l'épaisseur optique du milieu, il est possible d'avoir une première analyse de l'infinité des événements de la statistique du transport corpusculaire, afin de caractériser le régime de diffusion et d'identifier les approximations susceptibles d'être pertinentes pour l'étude du système.

L'albédo de diffusion simple représente la proportion de diffusions sur l'ensemble des événements d'interaction :

$$\alpha_s = \frac{\kappa_d}{\kappa_e} \quad (48)$$

α_s est égal à 0 dans le cas d'un milieu purement absorbant et égal à 1 dans un milieu non-absorbant. Une partie de l'information sur la forme de la fonction de phase est contenue dans le paramètre d'asymétrie g qui est l'espérance du cosinus de l'angle de diffusion de la variable aléatoire Ω :

$$g = \int_{4\pi} d\omega p_{\Omega}(\omega|\omega') \omega \cdot \omega' \quad (49)$$

g est contenu entre -1 et 1 . g est égal à 0 dans le cas d'une fonction de phase symétrique pour les directions avant et arrière, ce qui est par exemple le cas pour une fonction de phase isotrope. $g < 0$ dans le cas d'une fonction de phase orientée vers l'arrière et $g > 0$ pour une fonction de phase orientée vers l'avant.

On peut noter que (par construction de façon à assurer le principe de réciprocité) la densité de probabilité $p_{\Omega}(\omega|\omega')$ de la v.a. Ω est symétrique par rapport à ω' . Il vient de

cette propriété que l'espérance de la v.a. Ω est selon ω' , ce qui permet d'écrire :

$$g \omega' = \int_{4\pi} d\omega p_{\Omega}(\omega|\omega') \omega \quad (50)$$

L'épaisseur optique d'extinction e est le rapport d'une longueur caractéristique L du milieu sur le libre parcours moyen d'extinction $\lambda_e = 1/\kappa_e$:

$$e = L \kappa_e \quad (51)$$

Comme nous l'avons vu précédemment, l'absorption par le milieu peut être traitée a posteriori, comme une atténuation exponentielle le long des chemins de diffusion multiple. On se concentre donc généralement sur l'épaisseur optique de diffusion e_d , qui est le rapport de L sur le libre parcours moyen de diffusion $\lambda_d = 1/\kappa_d$:

$$e_d = L \kappa_d = \alpha_s e \quad (52)$$

Il s'agit de l'inverse du nombre de Knudsen.

Un point important pour la caractérisation d'un régime de diffusion est la perte d'information sur les directions de propagation. Cette perte d'information est due aux diffusions multiples qui redistribuent de manière aléatoire les directions de propagation des photons au sein du milieu. Afin de caractériser ce phénomène, nous allons nous intéresser à la statistique des chemins optiques de diffusion multiple (un chemin optique peut être vu comme une réalisation de la v.a. "chemin optique"). Plus précisément nous allons étudier l'espérance de la longueur du chemin optique de diffusion pure projetée sur sa direction de départ (voir Fig. 4). On sait de façon triviale que cette grandeur tend vers λ_d pour un nombre d'événement de diffusion tendant vers l'infini, lorsque la fonction de phase est isotrope. En effet la projection sur la direction de départ pour le premier saut vaut λ_d par définition et les sauts suivants sont tous indépendants distribués de façon isotrope en direction (donc contribution nulle à la projection).

Dans le cas d'une fonction de phase quelconque, on définit pour la longueur projetée la v.a. L^* de la façon suivante :

$$L^* = \sum_{j=0}^{\infty} L_{d,j}(\Omega_j \cdot \Omega_0) \quad (53)$$

dans laquelle les $L_{d,j}$ (représentant la longueur du saut j) sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées d'espérance λ . Les Ω_j (représentant le vecteur uni-

taire direction après le saut j) sont des variables aléatoires corrélées pour lesquelles nous allons devoir évaluer les espérances de leur produit scalaire avec Ω_0 . On note que $L_{d,j}$ et Ω_j sont des v.a. indépendantes, ce qui permet d'écrire l'espérance de L^* sous la forme :

$$E(L^*) = \sum_{j=0}^{\infty} E(L_{d,j})E(\Omega_j \cdot \Omega_0) \quad (54)$$

En notant λ_d^* cette espérance il vient :

$$\lambda_d^* = E(L^*) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_d E(\Omega_j \cdot \Omega_0) \quad (55)$$

où l'on rappelle que $\lambda_d = \frac{1}{\kappa_d}$ est le libre parcours moyen de diffusion, qui est défini comme l'espérance des v.a. $L_{d,j}$ (voir l'expression de $p_{L_{d,0}}(l_{d,0})$ Eq. 32) :

$$\lambda_d = \int_0^{\infty} dl_{d,j} p_{L_{d,j}}(l_{d,j}) l_{d,j} = \frac{1}{\kappa_d} \quad (56)$$

et où pour tout $j > 0$:

$$E(\Omega_j \cdot \Omega_0) = \int_{4\pi} d\omega_1 p_{\Omega_1}(\omega_1|\omega_0) \int_{4\pi} d\omega_2 p_{\Omega_2}(\omega_2|\omega_1) \dots \int_{4\pi} d\omega_j p_{\Omega_j}(\omega_j|\omega_{j-1}) \omega_j \cdot \omega_0 \quad (57)$$

et :

$$E(\Omega_0 \cdot \Omega_0) = 1 \quad (58)$$

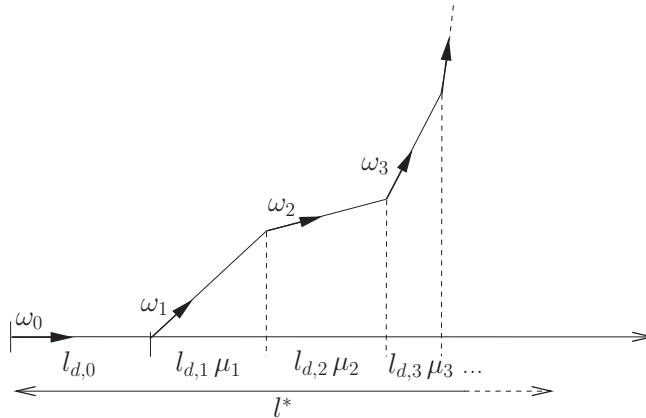


FIGURE 4: Projection d'un chemin de diffusion multiple sur sa direction de départ.

Pour une fonction de phase isotrope on retrouve l'intuition énoncée au dessus, à savoir $E(\boldsymbol{\Omega}_j \cdot \boldsymbol{\Omega}_0) = 0$ pour tout $j > 0$. Lorsque la fonction de phase est anisotrope, on peut réécrire simplement l'équation 57 en utilisant l'équation 50. En remplaçant successivement le motif de l'équation 50, on montre sans difficulté :

$$E(\boldsymbol{\Omega}_j \cdot \boldsymbol{\Omega}_0) = g^j \quad (59)$$

Il vient alors :

$$\lambda_d^* = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_d g^j = \frac{\lambda_d}{1-g} \quad (60)$$

Cela revient à définir un coefficient de diffusion équivalent $\kappa_d^* = \frac{1}{\lambda_d^*} = \kappa_d (1-g)$ correspondant à une situation où, comme dans le cas d'une fonction de phase isotrope, l'information sur la direction de départ est perdue dès la première diffusion. De manière similaire, en travaillant avec les longueurs d'extinction et en pondérant chaque interaction par l'albedo de diffusion simple (probabilité que le chemin continue après l'interaction), on obtient le coefficient d'extinction équivalent $\kappa_e^* = \kappa_e (1 - \alpha_s g)$. Cette propriété d'invariance du transport est couramment utilisée afin de se ramener à un problème équivalent dans lequel la fonction de phase est isotrope. Ce problème équivalent correspond à l'albedo de transport α_s^*

$$\alpha_s^* = \alpha_s \frac{1-g}{1-\alpha_s g} \quad (61)$$

à l'épaisseur optique de transport

$$e^* = (1 - \alpha_s g) e \quad (62)$$

et à une fonction de phase isotrope :

$$p_{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}') = \frac{1}{4\pi} \quad (63)$$

On définit aussi l'épaisseur de diffusion du problème de transport

$$e_d^* = \alpha_s^* e^* = (1-g) e_d \quad (64)$$

Cette équivalence n'est pas stricte. L'équation de transfert radiatif n'est notamment pas invariante par ce changement d'échelle. De plus, la définition du problème de transport équivalent ne prend pas complètement en compte la forme de la fonction de phase mais seulement son paramètre d'asymétrie. Cependant, on retrouve cette invariance dans de multiples situations :

l'équation résultant de l'approximation de diffusion par exemple (voir Sec. 3) est invariante par ce changement d'échelle. On retiendra surtout que le fait de raisonner sur ce problème équivalent à fonction de phase isotrope est très utile en terme d'images physiques et permet de comparer des situations très différentes, indépendamment de la forme de la fonction de phase.

3 Approximation macroscopique (approximation de diffusion)

3.1 Dérivation de l'équation de diffusion à partir de l'équation de transfert radiatif

L'objectif de cette section est d'obtenir une équation d'évolution spatiale de type diffusion pour la densité de photons (voir Eq. 93). Nous décrivons ici le passage de l'équation de transfert radiatif vers l'équation de diffusion à partir de l'approximation du même nom (voir paragraphe 3.1.1), afin de mettre en exergue le lien entre la description macroscopique et le point de vue mésoscopique sous-jacent que nous avons développé dans les sections précédentes.

Partons de l'équation de transfert radiatif au régime stationnaire :

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = -\kappa_e L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) + \alpha_s \kappa_e \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega}' L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}') p_{\Omega}(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}') + S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \quad (65)$$

Pour rester en toute généralité, le terme source est ici noté $S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ si on considère une source par émission thermique $S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = c(1 - \alpha_{s,\nu}) \kappa_{e,\nu} f^0$ comme dans l'équation (15). Ceci permet entre autre de garder la possibilité d'une séparation de la population de photons en ordre de diffusion comme dans la section précédente, ou bien de façon plus générale de tenir compte d'une source d'émission non nécessairement isotrope. Le passage à l'équation de diffusion se fait en intégrant l'équation de transfert radiatif sur l'ensemble des directions de propagation $\boldsymbol{\omega}$ afin d'obtenir un jeu d'équations sur les descripteurs macroscopiques : l'irradiance

$$G(\mathbf{x}) = \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \quad (66)$$

et le vecteur densité surfacique de flux

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} \quad (67)$$

On montre dans l'encart 2 qu'en intégrant l'équation de transfert radiatif sur les directions de propagation $\boldsymbol{\omega}$, on obtient l'équation macroscopique suivante :

$$\mathit{Div}_{\mathbf{x}} \mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\kappa_e(1 - \alpha_s) G(\mathbf{x}) + S_G(\mathbf{x}) \quad (68)$$

où $Div_{\mathbf{x}}$ est l'opérateur divergence par rapport à la position \mathbf{x} , $\kappa_e(1-\alpha_s)$ est égal au coefficient d'absorption κ_a et $S_G = \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$. La divergence du flux de photons résulte donc d'une balance entre leur taux de "disparition" par absorption, qui dans le cadre des images de la statistique corpusculaire est bien localement proportionnel à leur nombre, et leur taux "d'apparition" de par le terme source $S_G(\mathbf{x})$. On note que l'équation 68 a été obtenue sans aucune approximation. On montre dans l'encart 2 qu'en multipliant l'équation de transfert radiatif par $\boldsymbol{\omega}$ puis en l'intégrant, on obtient l'équation suivante :

$$\int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} (L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})) \cdot \boldsymbol{\omega}] = -\kappa_e(1 - \alpha_s g) \mathbf{j}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}_j(\mathbf{x}) \quad (69)$$

où $\mathbf{S}_j = \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega}$ est le vecteur *source de flux*. Les deux termes de droite Eq. 69 ont été obtenus sans approximations, mais le terme de gauche, qui est l'intégration du terme de transport de l'équation de transfert radiatif multiplié par $\boldsymbol{\omega}$, ne peut pas être exprimé en fonction des descripteurs macroscopiques sans faire une approximation sur la fonction de distribution (nous choisirons ici un développement en harmonique sphérique tronquée au premier ordre).

Encart 2 INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DE TRANSFERT RADIATIF EQ. 65 SUR LES DIRECTIONS $\boldsymbol{\omega}$.

Toutes les dérivations suivantes supposent que les propriétés radiatives du milieu sont indépendantes de la direction de propagation des photons. L'équation macroscopique sur l'irradiance Eq. 68 est obtenue en intégrant l'équation de transfert radiatif sur les directions de propagation $\boldsymbol{\omega}$. Procédons terme à terme.

- *Terme puits :*

$$\int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} [-\kappa_e L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})] = -\kappa_e G(\mathbf{x}) \quad (70)$$

- *Terme source par diffusion :*

$$\int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} \left[\alpha_s \kappa_e \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega}' L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}') p_{\Omega}(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}') \right] = \alpha_s \kappa_e \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega}' L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}') \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} p_{\Omega}(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}') \quad (71)$$

or la normalisation de la fonction de phase impose

$$\int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} p_{\Omega}(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}') = 1 \quad (72)$$

ce qui donne

$$\int_{4\pi} d\omega \left[\alpha_s \kappa_e \int_{4\pi} d\omega' L(\mathbf{x}, \omega') p_\Omega(\omega|\omega') \right] = \alpha_s \kappa_e G(\mathbf{x}) \quad (73)$$

- Terme source $S(\mathbf{x}, \omega)$: on note

$$\int_{4\pi} d\omega [S(\mathbf{x}, \omega)] = S_G(\mathbf{x}) \quad (74)$$

- Terme de transport :

$$\int_{4\pi} d\omega [\omega \cdot \mathbf{grad}_x L(\mathbf{x}, \omega)] = \int_{4\pi} d\omega \text{Div}_x [\omega L(\mathbf{x}, \omega)] = \text{Div}_x \left[\int_{4\pi} d\omega \omega L(\mathbf{x}, \omega) \right] \quad (75)$$

où Div_x est la divergence par rapport à la variable \mathbf{x} . En effet, \mathbf{x} et ω étant deux variables indépendantes $\text{Div}_x [\omega] = 0$. Il vient :

$$\int_{4\pi} d\omega [\omega \cdot \mathbf{grad}_x L(\mathbf{x}, \omega)] = \text{Div}_x \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (76)$$

d'après la définition de $\mathbf{j}(\mathbf{x})$.

L'équation macroscopique sur le vecteur densité de flux Eq. 69 est obtenue en multipliant l'équation de transfert radiatif par ω puis en l'intégrant. Procédons encore une fois terme à terme.

- Terme puits :

$$\int_{4\pi} d\omega [-\kappa_e L(\mathbf{x}, \omega) \omega] = -\kappa_e \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (77)$$

- Terme source par diffusion :

$$\int_{4\pi} d\omega \left[\alpha_s \kappa_e \int_{4\pi} d\omega' L(\mathbf{x}, \omega') p_\Omega(\omega|\omega') \omega \right] = \alpha_s \kappa_e \int_{4\pi} d\omega' L(\mathbf{x}, \omega') \int_{4\pi} d\omega p_\Omega(\omega|\omega') \omega \quad (78)$$

Si la fonction de phase $p_\Omega(\omega|\omega')$ est symétrique autour de la direction ω' alors $\int_{4\pi} d\omega p_\Omega(\omega|\omega') \omega$ est orienté suivant ω' :

$$\int_{4\pi} d\omega p_\Omega(\omega|\omega') \omega = g \omega' \quad (79)$$

où on a bien la définition du paramètre d'asymétrie (en multipliant cette expression

par $\boldsymbol{\omega}'$)

$$g = \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} p_{\Omega}(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}') \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}' \quad (80)$$

D'après l'équation 79 et la définition de \mathbf{j} Eq. 67, il vient

$$\int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} \left[\alpha_s \kappa_e \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega}' L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}') p_{\Omega}(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}') \boldsymbol{\omega} \right] = \kappa_e \alpha_s g \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (81)$$

- Terme source $S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$: on note

$$\int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} [S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega}] = \mathbf{S}_j(\mathbf{x}) \quad (82)$$

qui est un vecteur source de flux.

- Enfin, pour évaluer le terme de transport, il faudra faire une approximation sur la luminance (voir paragraphe suivant).

3.1.1 Approximation du développement en harmonique sphérique

On rappelle le terme de l'équation 69 qui est dû à l'intégration du terme de transport de l'équation de transfert radiatif et qui ne pouvait pas être exprimé en fonction des descripteurs macroscopiques sans faire une approximation sur la distribution angulaire de la luminance :

$$\int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} (L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})) \cdot \boldsymbol{\omega}] \quad (83)$$

Nous choisissons ici l'approximation, notée P1, qui consiste à modéliser L par un développement à l'ordre 1 en harmoniques sphériques. A l'ordre zéro (approximation P0), L est isotrope :

$$L_{P0}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{G_{P0}(\mathbf{x})}{4\pi} \quad (84)$$

qui assure la définition $G_{P0} = \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} L_{P0}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$. A l'ordre 1, l'approximation P1 s'écrit :

$$L_{P1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{G_{P1}(\mathbf{x})}{4\pi} + \frac{\mathbf{j}_{P1}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega}}{4\pi} \quad (85)$$

qui assure la définition $\mathbf{j}_{P1}(\mathbf{x}) = \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} L_{P1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega}$ et ne modifie pas la définition de l'irradiance : $G_{P1} = G_{P0}$ puisque l'intégrale de $\mathbf{j}_{P1}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega}$ sur toutes les directions est nulle. L'approximation P1 consiste donc à supposer que la luminance est la somme d'une constante et

d'un cosinus³. Lors de l'écriture de l'intégrale Eq. 83, le terme en cosinus s'annule (intégration sur l'angle solide total) et la contribution du terme d'ordre 0 donne (voir encart 3) :

$$\int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} (L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})) \cdot \boldsymbol{\omega}] \simeq \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} (L_{P1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})) \cdot \boldsymbol{\omega}] = \frac{1}{3} \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} G_{P1}(\mathbf{x}) \quad (86)$$

L'équation 69 sur le vecteur densité de flux s'exprime alors sous la forme :

$$\frac{1}{3} \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} G_{P1}(\mathbf{x}) = -\kappa_e(1 - \alpha_s g) \mathbf{j}_{P1}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \quad (87)$$

Dans la suite de cette section, il sera implicite que G et \mathbf{j} correspondent à l'approximation P1, et l'expression ci-dessus s'écrit (en supprimant les indices "P1") :

$$\frac{1}{3} \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}) = -\kappa_e(1 - \alpha_s g) \mathbf{j}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \quad (88)$$

D'où l'on tire :

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -D \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{S}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})}{\kappa_e(1 - \alpha_s g)} \quad (89)$$

où le coefficient de diffusion D est

$$D = \frac{1}{3 \kappa_e(1 - \alpha_s g)} \quad (90)$$

Dans l'équation 89, on reconnaît un terme correspondant à la loi de Fick [$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -D \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x})$] : il s'agit de l'image macroscopique classique où les particules descendent les gradients de densité. Le flux de photons est donc orienté suivant l'opposé du gradient de l'irradiance. Ce comportement peut être interprété comme un rappel à l'équilibre dans le sens où ce déplacement tend à homogénéiser le champ d'irradiance. On remarque que le coefficient de diffusion D ne dépend que du coefficient d'extinction $\kappa_e^* = \kappa_e(1 - \alpha_s g)$ du problème équivalent de transport défini à la section 2.

Encart 3 INTÉGRATION DU TERME DE TRANSPORT DE L'ÉQUATION DE TRANSFERT RADIATIF DANS LE CADRE DE L'APPROXIMATION P1.

3. Dans le cas particulier d'une configuration monodimensionnelle plan parallèle, l'approximation P1 sur la luminance s'écrit :

$$L_{P1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{G_{P1}(\mathbf{x})}{4\pi} + \frac{\|\mathbf{j}_{P1}(\mathbf{x})\|}{4\pi/3} \cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre \mathbf{e}_z et la direction $\boldsymbol{\omega}$.

Le terme $\frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega}}{4\pi}$ de la luminance n'apporte pas de contribution à l'intégrale Eq. 83. Le terme $\frac{G(\mathbf{x})}{4\pi}$ donne :

$$\int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} (L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})) \cdot \boldsymbol{\omega}] = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (91)$$

Or

$$\int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{A} \quad (92)$$

pour tout vecteur \mathbf{A} indépendant de $\boldsymbol{\omega}$. On obtient ainsi l'équation 86.

3.1.2 Equation de la diffusion

En substituant l'équation 89 dans l'équation 68, on obtient une équation de diffusion avec termes source et puits :

$$-D\nabla^2 G(\mathbf{x}) = -\kappa_a G(\mathbf{x}) + S_G(\mathbf{x}) - Div \left[\frac{\mathbf{S}_j(\mathbf{x})}{\kappa_e(1 - \alpha_s g)} \right] \quad (93)$$

où ∇^2 est l'opérateur laplacien par rapport à la position \mathbf{x} , Div est l'opérateur divergence par rapport à la position \mathbf{x} , κ_a et κ_e sont respectivement les coefficients d'absorption et d'extinction, α_s est l'albédo de diffusion simple, g est le paramètre d'asymétrie de la fonction de phase, S_G et \mathbf{S}_j sont respectivement des termes sources en irradiance et en flux, et D est le coefficient de diffusion macroscopique :

$$D = \frac{1}{3\kappa_e(1 - \alpha_s g)} = \frac{1}{3\kappa_e^*} \quad (94)$$

3.2 Conditions aux limites

La transposition des conditions aux limites mésoscopiques à la description macroscopique issue de l'approximation de diffusion pose un certain nombre de problèmes qui sont bien identifiés dans la littérature [3, 4, 5]. Dans cette section, nous proposons une lecture générale (incluant notamment le traitement de la réflexion aux parois) de la forme fonctionnelle Eq. 108 qui est souvent employée pour l'expression des conditions aux limites de l'équation de la diffusion Eq. 93. Au terme de cette discussion, nous aboutirons aux conditions aux limites Eqs. 113 et 114.

Aux parois du système, la distribution angulaire de la luminance est toujours discontinue à la jonction entre les hémisphères entrant et sortant (sauf dans une situation d'équilibre strict). L'hypothèse P1, qui modélise la luminance comme une fonction angulaire continue composée d'une constante et d'un cosinus, ne peut donc pas être vérifiée aux parois. Tout l'enjeu de l'écriture des conditions aux limites est d'assurer que l'irradiance et la densité de flux soient décrits avec le même ordre d'approximation aux parois et dans le champ. Cette problématique constitue en elle-même une thématique de recherche et les discussions qui suivent ne prennent pas en compte les développements les plus aboutis dans ce domaine.

Les conditions aux limites associées à l'équation de diffusion peuvent être de trois types :

- la valeur de G est fixée aux limites,
- la valeur de \mathbf{j} est fixée,

- on suppose une relation linéaire entre les valeurs de G et de \mathbf{j} (appelées conditions de Marshak en transfert radiatif).

Il est impossible de postuler a priori la valeur de l'irradiance ou du flux à la paroi, mais il est possible de dériver une relation entre ces deux grandeurs afin de travailler avec les conditions aux limites de Marshak. Plus précisément, nous allons dériver une relation entre G et la densité surfacique de flux net q à la paroi :

$$q = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \quad (95)$$

où \mathbf{n} est la normale de la paroi. \mathbf{n} est orientée vers l'intérieur du système entraînant la convention $q > 0$ pour un flux entrant. Afin de dériver une relation linéaire entre G et q en se basant sur des considérations physiques, il est pratique de séparer le traitement des photons balistiques et diffus. Nous pratiquons cette séparation uniquement aux parois mais l'irradiance dans l'équation de diffusion décrit toujours l'ensemble des photons. Cette pratique permet entre autres de tirer bénéfice de la connaissance parfaite des photons balistiques à la paroi en $z = 0$ puisque leur luminance est donnée par les conditions aux limites mésoscopiques (il s'agit d'une donnée du problème). On note $L^{(0)}$, $G^{(0)}$ et $q^{(0)}$ la luminance, l'irradiance et la densité de flux des photons balistiques et $L^{(d)}$, $G^{(d)}$ et $q^{(d)}$ celles de tous les autres photons, c'est-à-dire des photons ayant vécu au moins une diffusion. Contrairement à l'approximation de la diffusion simple, il ne s'agit pas ici d'une approximation puisque tous les photons sont considérés :

$$L^{(d)} = \sum_{j=1}^{\infty} L^{(j)} \quad (96)$$

La densité de flux à la paroi s'écrit $q = q^{(0)} + q^{(d)}$, où la densité $q^{(d)}$ est toujours négative puisque les photons diffus viennent du volume réactionnel (où ils ont vécu leur première diffusion) et sortent du milieu par les parois. Dans toutes les dérivations mathématiques qui suivent, on se place à la paroi et la variable spatiale est omise afin d'alléger les écritures. $q^{(d)}$ s'écrit :

$$q^{(d)} = \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} L^{(d)}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \quad (97)$$

Les conditions aux limites mésoscopiques fixent $L^{(d)}$ pour les directions entrantes. Dans le cas général d'une réflexion spéculaire à une paroi de réflectivité ρ , on a

$$L^{(d)}(\boldsymbol{\omega}) = \rho L^{(d)}(-\boldsymbol{\omega}^{spec}) \quad (98)$$

où $\boldsymbol{\omega}$ et $-\boldsymbol{\omega}^{spec}$ appartiennent respectivement à l'hémisphère entrant et sortant. Il vient :

$$q^{(d)} = (1 - \rho) \int_{2\pi^-} d\boldsymbol{\omega} L^{(d)}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \quad (99)$$

où $2\pi^-$ est l'hémisphère d'angle solide sortant défini tel que $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ est négatif (on retrouve $q^{(d)} < 0$). On introduit la moyenne $\langle \mu \rangle^-$ des cosinus des directions de sortie des photons diffus. En d'autres termes, $\langle \mu \rangle^-$ est la moyenne des cosinus des directions de sortie des chemins de diffusion multiples (chemins de premier retour, voir [6] pour une description de ces chemins dans le cadre de l'approximation P1), pondérés par l'atténuation le long des chemins :

$$\langle \mu \rangle^- = \int_{2\pi^-} d\boldsymbol{\omega} p_{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) |\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}| \quad (100)$$

où l'on remarque que $\langle \mu \rangle^- > 0$ et où $p_{\Omega}(\boldsymbol{\omega})$ est la densité de probabilité des directions de sortie des photons diffus :

$$p_{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{L^{(d)}(\boldsymbol{\omega})}{\int_{2\pi^-} d\boldsymbol{\omega} L^{(d)}(\boldsymbol{\omega})} \quad (101)$$

Enfin, d'après les conditions aux limites mésoscopiques Eq. 98, l'irradiance diffuse s'écrit :

$$G^{(d)} = \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega} L^{(d)}(\boldsymbol{\omega}) = (1 + \rho) \int_{2\pi^-} d\boldsymbol{\omega} L^{(d)}(\boldsymbol{\omega}) \quad (102)$$

En utilisant les trois équations précédentes, la densité surfacique de flux diffus à la paroi Eq. 99 s'écrit :

$$q^{(d)} = -\frac{1 - \rho}{1 + \rho} \langle \mu \rangle^- G^{(d)} \quad (103)$$

La densité de flux totale est

$$q = q^{(0)} + q^{(d)} = q^{(0)} - \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \langle \mu \rangle^- G^{(d)} \quad (104)$$

et en injectant $G^{(d)} = G - G^{(0)}$ dans cette expression, on obtient :

$$q = -\frac{1 - \rho}{1 + \rho} \langle \mu \rangle^- G + q^{(0)} + \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \langle \mu \rangle^- G^{(0)} \quad (105)$$

Le problème de la description des phénomènes aux parois dans le cadre de l'approximation P1 est que la loi de Fick (c'est-à-dire l'équation. 89 sans terme source) n'est pas valide aux frontières (puisqu'elle inclut l'hypothèse d'une distribution angulaire continue). Si elle était valide, on aurait :

$$q = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = -D \partial_s G \quad (106)$$

où $\partial_s G$ est la dérivée de l'irradiance par rapport à l'abscisse curviligne s associée à la normale \mathbf{n} . Ceci donnerait la relation linéaire suivante entre G et sa dérivée spatiale (en injectant Eq. 106 dans Eq. 105) :

$$G - \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \frac{D}{\langle \mu \rangle^-} \partial_s G = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \frac{1}{\langle \mu \rangle^-} q^{(0)} + G^{(0)} \quad (107)$$

Dans le cadre de ce cours, l'équation ci-dessus sera utilisée pour l'écriture des conditions aux limites. A notre connaissance, l'ensemble de la littérature ramène l'expression des conditions aux limites à la forme fonctionnelle suivante, qui est compatible avec l'équation 107 [5, 3, 4] :

$$[G \pm \mathcal{L} \partial_s G] = B \quad (108)$$

où \mathcal{L} est la longueur d'extrapolation et B est une constante. De plus, on travaille généralement avec la longueur d'extrapolation adimensionnelle h définie comme :

$$h = \mathcal{L} \kappa_e^* \quad (109)$$

En injectant la définition de D Eq. 94 dans l'équation 107, on obtient ici :

$$h = \frac{1}{3} \frac{1 + \rho}{\langle \mu \rangle^-} \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (110)$$

Du point de vue de la description que nous proposons, on est donc ramené à la question de la détermination de $\langle \mu \rangle^-$. Si l'on considère en première approximation une distribution isotrope des directions de premier retour ($p_{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) = 1/2\pi$), alors $\langle \mu \rangle^- = 1/2$ et on obtient :

$$h = \frac{2}{3} \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (111)$$

Cette valeur est couramment employée dans la communauté (voir [4] et les références citées) et elle sera utilisée en première approximation dans la suite de cette section. Nous remarquons cependant qu'un travail plus avancé, qui utilise une approche très différente de la nôtre, a proposé la valeur $h = 0.7104 \dots$ qui assure l'exactitude à l'ordre 2 dans un développement de Knudsen pour une situation bien particulière (où notamment la réflectivité est nulle) [7]. Ce résultat, qui correspond à la résolution du *problème de Milne*, est à comparer avec la valeur $h = 2/3$ que nous choisissons ici en première approximation (en l'absence de réflectivité). La constante B (voir Eq. 107 et Eq. 108) pour $\langle \mu \rangle^- = 1/2$ s'écrit :

$$B = 2 \frac{1 + \rho}{1 - \rho} q^{(0)} + G^{(0)} \quad (112)$$

RÉSUMÉ.

L'équation de la diffusion est résolue pour les conditions aux limites de Marshak :

$$[G \pm \mathcal{L} \partial_s G] = 2 \frac{1 + \rho}{1 - \rho} q^{(0)} + G^{(0)} \quad (113)$$

où l'exposant (0) fait référence à la population balistique, $\partial_s G$ est la dérivée de l'irradiance par rapport à l'abscisse curviligne s associée à la normale \mathbf{n} , et \mathcal{L} est la longueur d'extrapolation qui est approximée comme :

$$\mathcal{L} = \frac{2}{3} \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \frac{1}{\kappa_e^*} \quad (114)$$

où ρ est la réflectivité de la paroi et κ_e^* le coefficient d'extinction de transport.

4 Point de vue statistique et simulation numérique : la méthode de Monte Carlo

Au paragraphe 1 nous avons insisté sur le point de vue statistique qu'il est possible de porter sur l'équation de transfert radiatif dès lors qu'on la considère comme une équation de transport dans le cadre de la physique du transport linéaire. Les images physiques associées sont celles de photons suivis depuis chacune des sources dans des trajectoires de multi-diffusion et multi-réflexion jusqu'à leur contribution à la luminance en un point et dans une direction donnés.

Au paragraphe 3 nous avons abandonné la luminance pour ne raisonner qu'en termes de densités et de flux. Mais nous n'avons pas commenté l'approximation correspondante en termes statistiques. Et pourtant l'équation de diffusion est une brique essentielle de la physique statistique du transport linéaire. Les images physiques correspondantes sont celles du mouvement brownien. Le fait d'avoir choisi un point de vue macroscopique ne change rien aux sources, mais on perd le détail de la trajectoire. Le photon se déplace plus sur des successions de segments interrompus par des collisions : sa trajectoire est partout non-dérivable (même si elle reste parfaitement continue).

Donc en termes statistiques,

— l'équation de transfert radiatif correspond à un photon se déplaçant le long d'une

ligne brisée ;

- l'équation de diffusion correspond à un photon se déplaçant le long d'une trajectoire brownienne.

Au delà de l'apport intuitif de telles images physiques, ces représentations statistiques conduisent à une famille de techniques numériques permettant de résoudre *de façon exacte* l'équation de transfert radiatif ou l'équation de diffusion : la famille des algorithmes de Monte Carlo. On parle aussi de *méthode de Monte Carlo*. Dans une première approche, cette méthode consiste à générer aléatoirement la trajectoire d'un photon à travers le système et de regarder sa contribution à une observable radiative donnée, puis de répéter cette opération un très grand nombre de fois pour raisonner en moyenne. Par exemple, imaginons que l'on cherche à évaluer le facteur de forme d'une surface opaque \mathcal{S}_1 vers une autre surface opaque \mathcal{S}_2 . On se réfère alors à l'équation de transfert radiatif et on suit les photons émis par \mathcal{S}_1 le long de trajectoires de multi-diffusion et/ou de multi-réflexions jusqu'à leur absorption. Si cette absorption a lieu sur la surface \mathcal{S}_2 , on compte 1. Sinon, on compte 0. On calcule alors la moyenne de ces 1 et de ces 0 pour les N photons suivis et cela nous donne un estimateur du facteur de forme F_{12} de \mathcal{S}_1 vers \mathcal{S}_2 . On parle de méthode exacte car l'estimateur est non biaisé : il converge vers la valeur exacte quand N tend vers l'infini et le calcul de l'erreur standard associée à cet estimateur procure une évaluation fiable de son incertitude. Chaque estimation n'est bien sûr pas exacte, mais il n'y a aucun biais numérique et l'incertitude est mesurée : les éléments théoriques nécessaires à une bonne pratique de la méthode de Monte Carlo sont donc exactement ceux de la théorie de la mesure en physique expérimentale. Nous ne rentrons pas ici dans la description de cette famille de méthode et nous renvoyons au texte du cours accessible à l'adresse suivante : <http://edstar.lmd.jussieu.fr/documentation-and-textbooks/cours-monte-carlo-odeillo-etr2014/>

A retenir concernant la méthode de Monte Carlo :

- Son caractère très intuitif, pour les algorithmes les plus simples, pourrait faire croire que l'on résoud une autre physique que celle de l'équation de transfert radiatif : ce n'est pas le cas. La méthode de Monte Carlo estime la solution exacte de l'équation de transfert radiatif, sans changement de corpus. Les trajectoires des photons utilisés pour évaluer la solution suivent en effet des lois statistiques en accord parfait avec la physique statistique du transport de photons (dont l'équation de transfert radiatif est une traduction rigoureuse).
- Il n'est pas toujours facile de se convaincre de la rigueur de cette correspondance, notamment lorsque les algorithmes deviennent plus complexes dans l'objectif d'améliorer la convergence. Mais une procédure simple permet de contrôler cette rigueur : on traduit formellement l'estimateur en écrivant chacune des intégrales correspondant aux

lois de tirage employées dans l'algorithme, puis on vérifie que l'intégrale multiple qui en résulte est bien rigoureusement égale à une solution intégrale de l'équation de transfert radiatif, au sens que nous avons défini au paragraphe 1.3.

- Lorsque le milieu est diffusant et optiquement très épais, les algorithmes de Monte Carlo résolvant l'équation de transfert radiatif peuvent demander des temps de calcul très élevés (car il est nécessaire de simuler un nombre élevé de diffusions multiples). On peut alors chercher à résoudre l'équation de diffusion dont nous avons vu qu'elle est une bonne approximation de l'équation de transfert radiatif dans de tels contextes (paragraphe 3.1.2). Cependant, il n'est facile de simuler des trajectoires browniennes que dans le cas d'un milieu infini. L'approximation de diffusion se double alors souvent d'une autre approximation, cette fois purement numérique, permettant de générer aléatoirement des trajectoires de photons en accord avec l'équation de diffusion associées à des conditions à la limites du type de celles du paragraphe 3.2.

Bibliographie

- [1] J. Dauchet. *Analyse radiative des photobioréacteurs*. Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal, 2012.
- [2] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill, 1953.
- [3] A. Ishimaru. *Wave Propagation and Scattering in Random Media*. John Wiley & Sons, 1999.
- [4] D. J. Durian. Influence of boundary reflection and refraction on diffusive photon transport. *Phys. Rev. E*, 50 :857–866, 1994.
- [5] K. M. Case and P. F. Zweifel. *Linear Transport Theory*. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1967.
- [6] S. Blanco and R. Fournier. Short-path statistics and the diffusion approximation. *Physical Review Letters*, 97(23) :230604, 2006.
- [7] R. E. Marshak. The milne problem for a large plane slab with constant source and anisotropic scattering. *Phys. Rev.*, 72 :47–50, 1947.

Nomenclature

[0] sans dimension

[+] dimension variable

c	Vitesse de la lumière dans le milieu [$m \cdot s^{-1}$]
c_0	Vitesse de la lumière dans le vide [$m \cdot s^{-1}$]
e	Epaisseur optique [0]
e^*	Epaisseur optique de transport [0]
d	Longueur totale d'un chemin optique [m]
E	Epaisseur des configurations plan parallèle monodimensionnelles [m]
f	Fonction de distribution [$m^{-3} \cdot sr^{-1}$]
f_ν	Fonction de distribution par unité de fréquence [$m^{-3} \cdot sr^{-1} \cdot Hz^{-1}$]
g	Paramètre d'asymétrie de la fonction de phase [0]
G	Irradiance [$W \cdot m^{-2}$]
G_ν	Densité fréquentielle d'irradiance [$W \cdot m^{-2} \cdot Hz^{-1}$]
h	Constante de Planck [$J \cdot s^{-1}$]
κ_a	Coefficient linéique d'absorption [m^{-1}]
κ_d	Coefficient linéique de diffusion [m^{-1}]
κ_e	Coefficient linéique d'extinction [m^{-1}]
l	longueur de diffusion [m]
l_a	longueur d'absorption [m]
l_e	longueur d'extinction [m]
L	Luminance [$W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$]
L_ν	Luminance monochromatique [$W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1} \cdot Hz^{-1}$]
p	Fonction de phase [sr^{-1}]

Lettres Grecques

α_s	Albédo de diffusion simple [0]
η	Densité de photons [m^{-3}]
η_ν	Densité de photons par unité de fréquence [$m^{-3} \cdot Hz^{-1}$]
ν	Fréquence du rayonnement [Hz]
ρ^S	Réfectivité de la paroi \mathcal{S} [0]
σ_a	Section efficace d'absorption [m^2]
σ_d	Section efficace de diffusion [m^2]
σ_e	Section efficace d'extinction [m^2]
$d\omega$	Angle solide élémentaire [sr]
$d\mathbf{e}$	Angle solide élémentaire [sr]
φ	Densité surfacique de flux [$W \cdot m^{-2}$]
φ_ν	Densité surfacique de flux monochromatique [$W \cdot m^{-2} \cdot Hz^{-1}$]

Autres

$\langle \rangle$	Moyenne spatiale
-------------------	------------------

