



Ecole Thématique CNRS ETR2017

« Rayonnement Thermique en Milieux Semi-Transparentes »

Laboratoire de Thermique et Energie de Nantes, 13-19 mai 2017

Notions de base en rayonnement thermique

David Lacroix, Pascal Boulet, Anthony Collin
LEMTA UMR7563 Vandoeuvre-lès-Nancy



Table des matières

1	Le rayonnement thermique	1
1.1	Introduction et historique	1
1.2	Lois physiques du rayonnement thermique	2
1.2.1	Absorption et émission du rayonnement	2
1.2.2	Nature électromagnétique du rayonnement	4
1.2.3	Le rayonnement du corps noir	5
1.2.4	La loi de Planck	6
1.3	La loi de Stefan-Boltzmann	10
2	Grandeurs usuelles en rayonnement	13
2.1	Notion de flux	13
2.2	La luminance	14
2.2.1	Nature directionnelle du rayonnement	14
2.2.2	Luminance spectrale	14
2.2.3	Luminance totale	16
2.3	Densité de flux rayonnée	17
2.3.1	Émittance	17
2.3.2	Éclairement	19
2.4	Propriétés optiques des surfaces	19
2.4.1	Émissivité	19
2.4.2	Interaction du rayonnement avec un matériau	21

3	Échanges entre surfaces - Milieu transparent	27
3.1	Échanges entre surfaces noires - Facteur de forme	27
3.1.1	Relations entre facteurs de forme	28
3.1.2	Flux net échangé entre surfaces noires	31
3.2	Échanges entre surfaces grises diffusantes - Radiosité	32
3.2.1	Radiosité	33
3.2.2	Flux net sur une surface grise diffusante	33
3.2.3	Échanges entre deux surfaces grises diffusantes	34
3.2.4	Échanges entre plusieurs surfaces grises diffusantes	35
3.3	Coefficient d'échange thermique par rayonnement	37
4	Transferts en milieu semi-transparent	39
4.1	Établissement de l'ETR	39
4.1.1	Atténuation par absorption	40
4.1.2	Atténuation par diffusion	40
4.1.3	Renforcement par émission propre	40
4.1.4	Renforcement par diffusion	41
4.1.5	Equation du transfert radiatif	42
4.1.6	Flux et divergence de flux radiatif	42
4.2	Solution pour des configurations simples	43
4.2.1	Milieu froid	43
4.2.2	Milieu homogène isotherme non diffusant	43
4.2.3	Pour aller plus loin... principales méthodes de résolution	44
4.3	Introduction à la méthode de Monte Carlo	44
4.3.1	Envoi de quanta	45
4.3.2	Évolution des quanta dans le milieu	48
4.3.3	Choix de la direction après un événement de diffusion	51
4.3.4	Flux et divergence de flux radiatif	52

5	Échange de chaleur par rayonnement - TD	53
5.1	Angle solide du système terre - soleil	53
5.2	Pyrométrie - Température de luminance	53
5.3	Émittance et loi de Wien	54
5.4	Étude d'un corps noir	54
5.5	Énergie solaire reçue par la terre	54
5.6	Capteur solaire, effet de serre [1]	54
5.7	Flux net entre deux plaques - abaqués	55
5.8	Étude des pertes radiatives d'un four [1]	55

Nomenclature

Symbole	Unités	Description
c	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Vitesse
d	m	Longueur
E	J	Énergie
E	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	Émittance
F	–	Fraction de l'émission du CN
F_{ij}	–	Facteur de forme
\mathfrak{F}_{ij}	–	Facteur de forme gris
H	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	Éclairement
h_r	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$	Coefficient d'échange radiatif
I	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$	Luminance
J	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	Radiosité
k	–	Indice d'absorption
m	–	Indice de réfraction complexe
n	–	Indice de réfraction
$\hat{\mathbf{n}}$	–	Vecteur normal à une surface
\dot{q}''	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	Densité surfacique de flux
\dot{Q}	W	Flux de chaleur
r, R	m	Rayon
$\hat{\mathbf{r}}$	m	Vecteur position
S	m^2	Surface
T	K	Température

Lettres Grecques

Symbole	Unités	Description
α	–	Absorptivité
ϵ	–	Émissivité
η	cm^{-1}	Nombre d'onde
κ_a	m^{-1}	coefficient d'absorption
κ_d	m^{-1}	coefficient de diffusion
κ_e	m^{-1}	coefficient d'extinction
λ	m	Longueur d'onde
ν	s^{-1}	Fréquence

ω	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	Pulsation
Ω	sr	Angle solide
$\hat{\Omega}$	–	Direction de propagation du rayonnement
ρ	–	Réfectivité
τ	–	Transmittivité
θ	rad	Angle polaire
φ	rad	Angle azimutal

Indices et exposants

Symbole	Description
0	Corps noir
'	Directionnel
\cap	Hémisphérique
<i>abs</i>	Absorbé
<i>émis</i>	Émis
<i>b</i>	Blackbody
<i>i</i>	Incident
<i>m</i>	Moyen
<i>n</i>	Normal
<i>net</i>	Grandeur nette
<i>t</i>	Transmis
λ, ν, η	Spectral

Constantes

Symbole	Unités	Valeur	Description
c_0	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$2.997\,92 \times 10^8$	Vitesse de la lumière dans le vide
k	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$	$1.380\,66 \times 10^{-23}$	Constante de Boltzmann
h	$\text{J} \cdot \text{s}$	$6.626\,08 \times 10^{-34}$	Constante de Planck
σ	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	5.6706×10^{-8}	Constante de Stefan

Chapitre 1

Le rayonnement thermique

1.1 Introduction et historique

La physique du rayonnement recouvre plusieurs domaines de recherche et a de nombreuses applications. C'est un champ d'étude qui s'étend de l'optique géométrique à la théorie électromagnétique en passant par les domaines de la thermique, de la neutronique ou encore des sciences de l'atmosphère et des milieux interstellaires.

Le rayonnement est un sujet d'étude relativement ancien. Ainsi, dès l'antiquité des scientifiques tels que Euclide¹ s'intéressent à la propagation des rayons lumineux, notamment à travers l'étude des miroirs. Toutefois, il faut attendre l'époque classique et les travaux de Newton² sur la lumière pour avoir une première théorie sur le spectre du rayonnement. Enfin, c'est au cours du XIX^{ème} siècle que les progrès les plus importants sont faits dans la compréhension du rayonnement et qu'une théorie des transferts radiatifs commence à émerger.

L'objet de ce document est de rappeler les bases de la théorie du rayonnement à travers la définition de plusieurs concepts et grandeurs caractéristiques (spectre électromagnétique, corps noir, luminance, flux radiatif, flux net, facteurs de forme ...), puis de formaliser les échanges entre surfaces à travers un milieu transparent, et enfin d'introduire le problème des milieux semi-transparentes. Ce cours introductif propose en fait les éléments nécessaires à la compréhension des cours suivants sur la physique des transferts radiatifs dans les milieux absorbants et diffusants (équation du transfert radiatif, diffusion du rayonnement, rayonnement des gaz, propriétés des matériaux, méthodes numériques associées ...).

1. Euclide, mathématicien et physicien grec (III^{ème} avant notre ère) - <http://fr.wikipedia.org/wiki/Euclide>

2. http://Isaac_Newton, physicien et mathématicien anglais (1643-1727) - http://fr.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

1.2 Lois physiques du rayonnement thermique

La description de la notion de “rayonnement thermique” peut revêtir plusieurs aspects selon le formalisme choisi pour le représenter. Du point de vue du physicien, il s’agit de l’étude des échanges d’énergie par le biais d’ondes électromagnétiques dans la matière ou le vide. Dans ce cas, le formalisme approprié pour en établir les bases repose sur la théorie électromagnétique de Maxwell³ et l’approche ondulatoire. Une autre vision des choses est de considérer le modèle dit “corpusculaire” avec le concept de photon proposé par Planck⁴ et Einstein⁵ où le rayonnement est décrit par des paquets d’énergie, les “quanta”, susceptibles d’interagir avec la matière. Selon les cas étudiés, on tire en fait bénéfice de l’utilisation de l’une ou l’autre des approches, voire de la combinaison des deux.

Du point de vue de l’ingénieur, ou du thermicien, on préfère souvent l’approche “énergétique” pour décrire les interactions entre le rayonnement et la matière, l’intensité du rayonnement ou luminance étant la grandeur de référence comme on le verra par la suite. Cela passe notamment par la définition d’un certain nombre de lois (Planck, Stefan . . .) et l’utilisation de bilans énergétiques, en particulier lorsqu’il s’agit de milieux semi-transparents, la résolution de ce qu’on appelle l’Équation du Transfert Radiatif (ETR). La référence à l’approche corpusculaire est toutefois également beaucoup utilisée dans la justification des méthodes statistiques (type méthodes de Monte carlo) également utilisables pour décrire les échanges radiatifs. Enfin, il est important de noter que dans certains cas l’approche électromagnétique est indispensable pour caractériser l’interaction du rayonnement avec un milieu ou un objet. C’est notamment le cas lorsque l’on s’intéresse à la théorie de la diffusion du rayonnement, ou encore si l’on souhaite étudier le rayonnement en champ proche, c’est-à-dire, au voisinage immédiat d’une surface. Dans cette première partie nous allons, rappeler quelques notions de base sur l’interaction rayonnement-matière et définir les lois fondamentales du rayonnement thermique.

1.2.1 Absorption et émission du rayonnement

L’interaction rayonnement/matière au niveau microscopique se traduit par des transitions énergétiques affectant les atomes (transitions électroniques) et les molécules (états de vibration, translation, ou rotation). Par exemple, considérons un système matériel “dense”, constitué d’un ensemble d’atomes. Un atome est en particulier défini par son état d’énergie E_1 caractéristique de sa configuration électronique. L’interaction du rayonnement avec cet atome peut se traduire par deux mécanismes d’échange d’énergie du type transition électronique, figure (1.1). D’une part, il peut y avoir absorption d’un photon reçu et donc augmentation de l’énergie globale du système E_2 . D’autre part, on peut avoir émission d’un photon et diminution de cette énergie E_0 . Concernant ce mécanisme d’émission il peut être “spontané” ou “induit”. Dans les deux cas évoqués ci-dessus, la fréquence ν , ou la pulsation ω du photon absorbé ou émis est directement

3. James Clerk Maxwell, physicien et mathématicien écossais (1831-1879) - http://en.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell

4. Max Planck, physicien allemand (1858-1947) - http://en.wikipedia.org/wiki/Max_Planck

5. Albert Einstein, physicien d’origine allemande (1879-1955) - http://en.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein

proportionnelle à la variation d'énergie de l'atome.

$$\Delta E_{\text{abs}} = E_2 - E_1 = h\nu_{\text{abs}} = \hbar\omega_{\text{abs}} \quad (1.1)$$

$$\Delta E_{\text{emi}} = E_1 - E_0 = h\nu_{\text{emi}} = \hbar\omega_{\text{emi}} \quad (1.2)$$

avec h la constante de Planck et \hbar la constante de Planck réduite ($\hbar = h/2\pi$). On rappelle que $\omega = 2\pi\nu$.

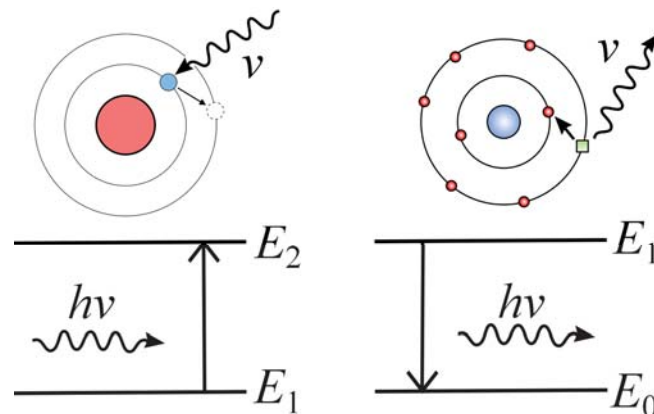


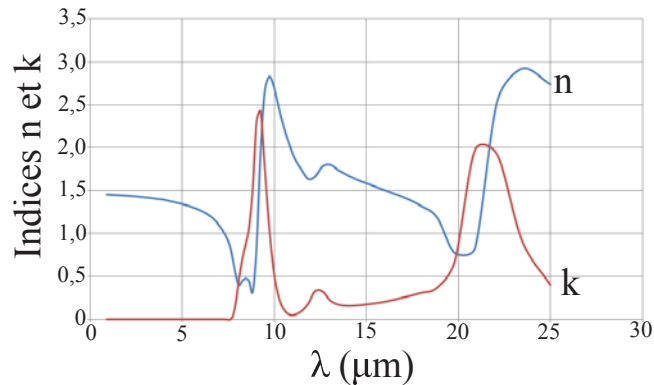
FIGURE 1.1 – Absorption et emission d'un photon

A noter que le rayonnement se propage sans nécessité d'un milieu matériel (au contraire des autres modes de transfert de chaleur, conduction et convection, qui nécessitent la présence d'un milieu "support"). Si la propagation s'effectue à travers un milieu matériel, le rayonnement est susceptible d'interagir avec le milieu traversé par absorption comme on vient de le voir, mais aussi par diffusion (on a alors un changement de direction du rayonnement). Dans tous les cas, on peut définir une vitesse de propagation du rayonnement, notée c , qui dépend des propriétés du milieu traversé. On mesure cette vitesse par la relation :

$$c = \frac{c_0}{n} \quad (1.3)$$

avec $c_0 = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ la vitesse de la lumière dans le vide et n l'indice de réfraction du milieu traversé.

Par définition, dans le vide $n=1$ et dans l'air il est voisin de 1 ($n_{\text{air}}=1.00029$). En revanche, pour tout autre milieu cette grandeur peut changer et évoluer avec la fréquence du rayonnement. L'indice de réfraction est en fait la partie réelle de l'indice optique complexe $m = n + ik$, où k est l'indice d'absorption, qui permet de quantifier l'aptitude d'un milieu à absorber le rayonnement (on choisit ici volontairement la convention $m = n + ik$ pour des raisons de cohérence avec des cours spécialisés qui seront abordés plus tard, mais on trouve parfois également l'écriture $m = n - ik$, cette convention ayant des répercussions sur le formalisme électromagnétique des phénomènes mais n'ayant aucune conséquence sur les résultats exposés dans ce chapitre). À titre d'exemple, la figure (1.2) donne l'évolution des indices n et k pour la silice (composant majoritaire du verre). On note que pour les courtes longueurs d'onde (partie visible du spectre), l'indice n est voisin de 1.5 comme cela est couramment admis en optique géométrique dans les études de systèmes optiques classiques (dioptries, lentilles ...).

FIGURE 1.2 – Indices de réfraction n et d'absorption k de la silice

Les notions de fréquence ou de pulsation ne sont pas les seules utilisées pour caractériser un rayonnement. En utilisant l'équation (1.3) donnant la célérité de l'onde dans le milieu étudié, on peut exprimer la longueur d'onde du rayonnement λ ou encore son nombre d'onde η en fonction de la fréquence ν (attention, nombreuses notations différentes possibles selon le domaine étudié : rayonnement thermique, spectroscopie, physique du transfert,...).

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (1.4)$$

$$\eta = \frac{\nu}{c} \quad (1.5)$$

La longueur d'onde s'exprimera couramment en nm ou en μm selon le domaine spectral considéré (rayonnement visible ou infrarouge). Le nombre d'onde, fréquemment utilisé en spectroscopie, est lui exprimé usuellement en cm^{-1} , on a :

$$\lambda(\mu\text{m}) = \frac{10000}{\eta(\text{cm}^{-1})} \quad (1.6)$$

Remarque : On retiendra que la fréquence ν d'une onde électromagnétique (ou d'un photon) n'est pas modifiée lors du passage d'un milieu à un autre. En revanche, la longueur d'onde λ ou le nombre d'onde η dépendent de la valeur de l'indice de réfraction n du milieu considéré. Aussi, lors de la résolution spectrale de l'ETR, il est souvent plus judicieux de travailler en fréquence plutôt qu'en longueur d'onde, si l'indice n diffère de 1, comme cela sera exposé dans les cours à venir (diffusion, rayonnement des gaz ...). Dans la suite de ce cours on utilisera des notations en fréquence, mais aussi en longueur d'onde, cette notation étant encore très utilisée en rayonnement thermique en dépit du "défaut" évoqué ci-dessus.

1.2.2 Nature électromagnétique du rayonnement

La nature électromagnétique du rayonnement, évoquée dans la section précédente, et sa caractérisation à l'aide de la fréquence ou de la longueur d'onde font qu'il est possible d'identifier des domaines spectraux caractéristiques de certains rayonnements. La figure (1.3) donne un aperçu du spectre électromagnétique et des principales zones

d'intérêt. Aux très courtes longueurs d'onde (ou hautes fréquences) on trouve les rayonnements très énergétiques (on rappelle que $E \propto h\nu$) : rayonnements γ , X et ultraviolet (UV). Vient ensuite la zone spectrale visible (à l'œil humain) qui est relativement étroite et se situe approximativement entre 400 et 800 nm. Au delà du visible, on a le rayonnement infrarouge (IR) qui est d'une grande importance pour le thermicien. Le rayonnement IR se décompose lui-même en trois zones : infrarouges courts, moyens et lointains. Les plus grandes longueurs d'ondes sont associées aux rayonnements micro-ondes et radio.

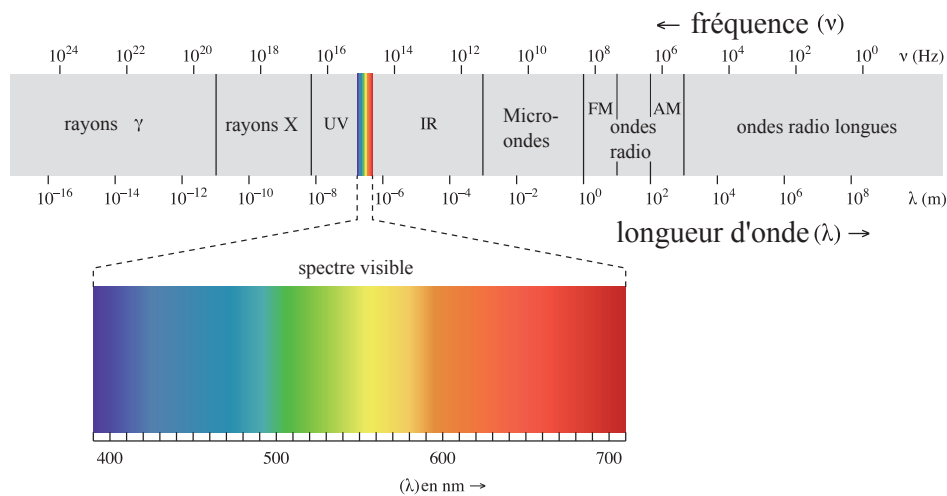


FIGURE 1.3 – Spectre électromagnétique et classement des ondes

Pour les applications relatives à l'étude du rayonnement thermique, il n'est pas utile de considérer le spectre électromagnétique complet. Par exemple, la contribution des ondes radio au chauffage d'un matériau est quasi nulle. On considère généralement que le rayonnement thermique couvre la zone s'étendant des ultraviolets aux infrarouges (soit entre 0,1 et 100 μm). Dans la section suivante, nous allons rappeler le lien entre la température d'un matériau et l'émission de rayonnement qui lui est associée.

1.2.3 Le rayonnement du corps noir

La notion de corps noir est très importante en rayonnement car elle donne une "référence" qui permet de quantifier tout type de rayonnement. Le concept de corps noir a été introduit par Kirchhoff⁶ en 1860 [2] "*...the supposition that bodies can be imagined which, for infinitely small thicknesses, completely absorb all incident rays, and neither reflect nor transmit any. I shall call such bodies perfectly black, or, more briefly, black bodies*", ce sont les travaux de Planck qui lui donneront le formalisme mathématique utilisé aujourd'hui.

Le corps noir (CN) est un objet idéal, Siegel et Howell [3] en donnent la définition sui-

6. Gustav Robert Kirchhoff, physicien allemand (1824-1887) - http://fr.wikipedia.org/wiki/Gustav_Kirchhoff

vante : “*Tout le rayonnement incident arrivant à la surface d’un corps noir est absorbé, il n’y a pas de réflexion ni de transmission. Cette propriété est vraie quelle que soit la longueur d’onde du rayonnement et quelle que soit l’incidence du rayonnement. Ainsi, le corps noir est un absorbeur parfait pour tout rayonnement*”.

Dans la pratique il existe différentes techniques pour réaliser des corps noirs. Ceux-ci n’ont cependant le comportement d’un CN idéal que dans une plage spectrale donnée. Une technique classique pour obtenir un CN, dans l’infrarouge, consiste à fabriquer une enceinte fermée (four) percée d’une petite ouverture, figure (1.4). Le rayonnement piégé dans la cavité est réfléchi et absorbé sur les parois internes du four. L’ouverture est suffisamment petite pour limiter les pertes dans le bilan radiatif de la cavité. L’équilibre thermique étant garanti dans le four à une certaine température T_{eq} , le rayonnement qui est émis au niveau de l’ouverture à un comportement approchant celui d’un CN à la température T_{eq} .

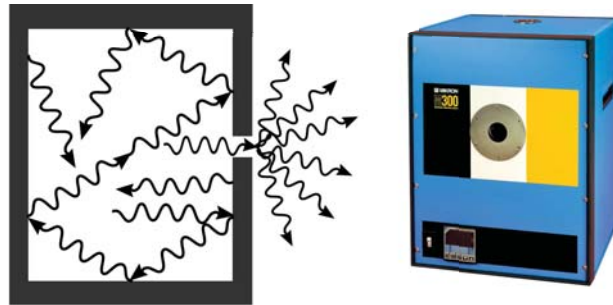


FIGURE 1.4 – Corps noir (schéma de principe) ; Corps noir de référence pour l’infrarouge

On peut également réaliser des CN à partir d’autres techniques, par exemple en utilisant des matériaux texturés couverts de peinture absorbante, ou bien en mettant en œuvre des nanotubes de carbone [4]. Enfin, les étoiles sont également souvent assimilées à des corps noirs à haute température (bien que leur émission réelle soit bien plus complexe), le rayonnement émis par la photosphère étant caractérisé par une température d’équilibre (par exemple 5780 K pour le soleil).

La notion de corps noir étant définie, il reste à quantifier ses propriétés et en particulier la puissance rayonnée par un corps noir à une température et à une longueur d’onde donnée. C’est l’objet des travaux de Planck présentés dans le paragraphe suivant.

1.2.4 La loi de Planck

La loi de Planck permet de formuler mathématiquement le flux rayonné par un corps noir en fonction de sa température et de la longueur d’onde d’intérêt. Proposée en 1901 par Planck [5], elle reprend les travaux entamés par Kirchhoff et permet de concilier les

lois sur le rayonnement du CN proposées auparavant par Wien⁷ et Rayleigh⁸-Jeans⁹, respectivement satisfaisantes aux hautes et basses fréquences, Figure (1.5).

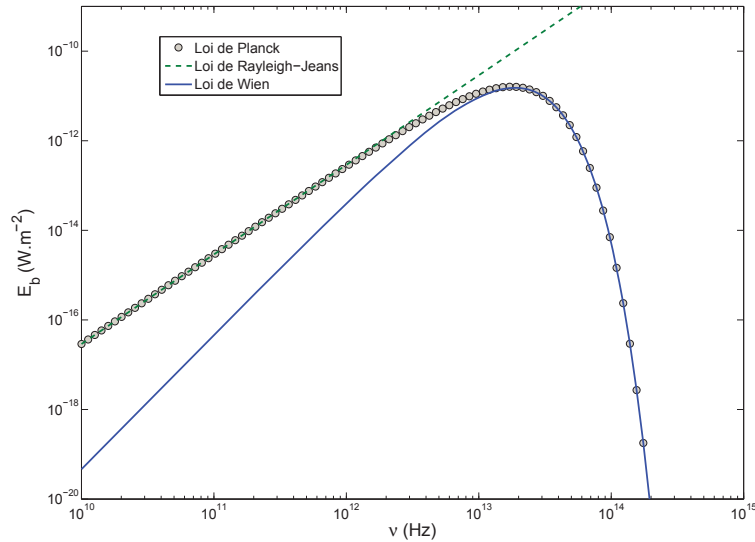


FIGURE 1.5 – Lois du rayonnement du CN de Planck, Wien et Rayleigh-Jeans, à $T=300$ K

La densité de flux rayonné par tout matériau peut ensuite être évaluée par comparaison avec celle d’un corps noir à la même température. On parle d’émittance ou d’*Emissive power* en anglais, pour définir cette grandeur en (W.m^{-2}), notée $M_\nu(T)$ (en français) ou encore $E_\nu(T)$ (en anglais). Dans le cas particulier du corps noir, on utilise la notation $M_\nu^0(T)$ ou encore $E_{b\nu}(T)$ (avec “b” pour blackbody).

Dans le cas d’une surface noire, à la température T exprimée en kelvins et entourée par un milieu transparent d’indice n (transparent donc non absorbant $\leftrightarrow k=0$), la loi de Planck s’écrit :

$$E_{b\nu}(T) = \frac{2\pi n^2 h \nu^3}{c_0^2 [\exp(h\nu/kT) - 1]} \quad (1.7)$$

où k est la constante de Boltzmann. L’émittance peut également être exprimée en fonction de la longueur d’onde ou du nombre d’onde. Il faut cependant faire attention lors du changement de variable, ces deux grandeurs étant dépendantes de l’indice de réfraction du milieu considéré (équations (1.4), (1.5)). Dans ces conditions, la grandeur conservative est l’émittance totale ou encore l’émittance spectrale dans l’intervalle spectral associé :

$$E_{b\nu}(T)d\nu = E_{b\eta}(T)d\eta = -E_{b\lambda}(T)d\lambda \quad (1.8)$$

7. Wilhelm Wien, physicien allemand (1864-1928) - http://en.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Wien

8. Lord John William Rayleigh, physicien anglais (1842-1919) - http://fr.wikipedia.org/wiki/John_William_Strutt_Rayleigh

9. Sir James Jeans, physicien, astronome et mathématicien britannique (1877-1946) - http://en.wikipedia.org/wiki/James_Hopwood_Jeans

On peut exprimer $d\nu$ comme :

$$d\nu = \frac{\partial\nu}{\partial n}dn + \frac{\partial\nu}{\partial\eta}d\eta = \frac{\partial\nu}{\partial n}dn + \frac{\partial\nu}{\partial\lambda}d\lambda \quad (1.9)$$

Dans certains matériaux comme les milieux à gradient d'indice on a $dn \neq 0$, mais pour la plupart des applications on considère que n est une constante. Avec cette hypothèse ($n=\text{cte}$) on peut réécrire l'émittance spectrale, équation (1.7) en fonction de λ et η .

$$E_{b\lambda}(T) = \frac{2\pi hc_0^2}{n^2\lambda^5 [\exp(hc_0/n\lambda kT) - 1]} \quad (1.10)$$

$$E_{b\eta}(T) = \frac{2\pi hc_0^2\eta^3}{n^2 [\exp(hc_0\eta/nkT) - 1]} \quad (1.11)$$

Pour l'émittance spectrale écrite en fonction de la longueur d'onde, équation (1.10), où λ est mesurée en μm il est courant de poser :

$$C_1 = 2\pi hc_0^2 = 3.7418 \times 10^8 \text{ W} \cdot \mu\text{m}^4 \cdot \text{m}^{-2} \quad (1.12)$$

$$C_2 = hc_0/k = 14388 \mu\text{m} \cdot \text{K} \quad (1.13)$$

On obtient alors la loi de Planck sous la forme suivante :

$$E_{b\lambda}(T) = \frac{C_1\lambda^{-5}}{n^2 \exp(C_2/n\lambda T) - 1} \quad (1.14)$$

La figure (1.6) donne l'évolution spectrale de la loi de Planck pour plusieurs températures caractéristiques. On a choisi ici une représentation en fonction de la longueur d'onde avec abscisses et ordonnées en puissances de 10. On peut observer que d'une part l'intensité rayonnée par un corps noir augmente avec sa température et d'autre part que le maximum d'émission se décale vers les courtes longueurs d'onde quand T croît. La droite en pointillés sur la figure (1.6) donne la longueur d'onde du maximum d'intensité rayonnée à une température donnée. Elle est définie par une loi appelée "loi du déplacement de Wien".

Remarque : des formulations approchées sont connues pour les domaines des courtes et grandes longueurs d'onde (approximations évoquées au début de ce paragraphe, désormais rarement (jamais ?) utilisées dans la mesure où la loi de Planck est valable sur toute la gamme spectrale). Il s'agit de lois de Rayleigh-Jeans et Wien présentées ci-dessous :

Loi de Rayleigh-Jeans L'émittance du corps noir pour les basses fréquences, respectivement les grandes longueurs d'onde ($hc_0/n\lambda kT \ll 1$) est bien approximée par la loi de Rayleigh-Jeans, qui s'écrit :

$$E_{b\nu}(T) = \frac{2\pi n^2 \nu^2 kT}{c_0^2} \quad (1.15)$$

$$E_{b\lambda}(T) = \frac{2\pi c_0 kT}{n\lambda^4} \quad (1.16)$$

$$E_{b\eta}(T) = \frac{2\pi c_0 \eta^2 kT}{n} \quad (1.17)$$

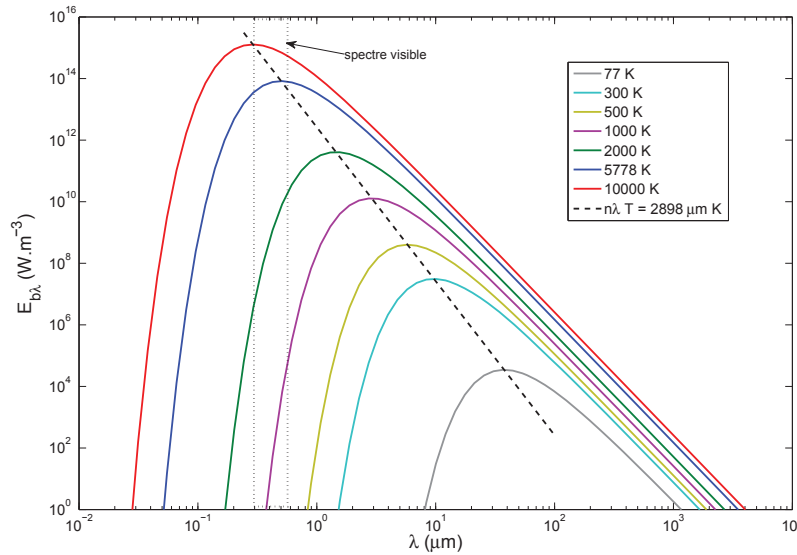


FIGURE 1.6 – Loi du rayonnement du CN de Planck à différentes températures et loi du déplacement de Wien

Loi de Wien

Pour les hautes fréquences ou les courtes longueurs d'onde ($hc_0/n\lambda kT \gg 1$), on trouve la loi de Wien :

$$E_{b\nu}(T) = \frac{2\pi n^2 h \nu^3}{c_0^2} \exp(-h\nu/kT) \quad (1.18)$$

$$E_{b\lambda}(T) = \frac{2\pi h c_0^2}{n^2 \lambda^5} \exp(-hc_0/n\lambda kT) \quad (1.19)$$

$$E_{b\eta}(T) = \frac{2\pi h c_0^2 \eta^3}{n^2} \exp(-hc_0\eta/nkT) \quad (1.20)$$

Loi du déplacement de Wien

La loi du déplacement de Wien évoquée précédemment (figure (1.6)) permet de localiser le maximum d'émission du corps noir à une température donnée en fonction de la fréquence, de la longueur d'onde ou nombre d'onde. Cette loi est déduite de la loi de Planck et obtenue par une des différentielles :

$$\frac{dE_{b\nu}(T)}{d\nu} = \frac{dE_{b\eta}(T)}{d\eta} = \frac{dE_{b\lambda}(T)}{d\lambda} = 0 \quad (1.21)$$

La calcul des dérivées conduit respectivement aux trois relations suivantes :

$$\left. \frac{\nu}{T} \right|_{max} = 5.879 \times 10^{10} \text{ Hz} \cdot \text{K}^{-1} \quad (1.22)$$

$$\left. \lambda n T \right|_{max} = 2898 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{K} \quad (1.23)$$

$$\left. \frac{\eta}{nT} \right|_{max} = 1.961 \text{ cm}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad (1.24)$$

La forme la plus connue est celle de la relation (1.23), qui pour un milieu d'indice $n = 1$ (vide, air sec) conduit à écrire $\lambda T|_{max} = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$. La figure (1.7) donne un autre aperçu des lois de Planck et Wien avec une échelle semi-logarithmique couvrant la plage spectrale de l'infrarouge. Les trois zones caractéristiques (court, moyen et lointain) y sont représentées à titre indicatif (les plages sont variables selon les auteurs). On peut ainsi noter que l'infrarouge court, en dessous de $3 \mu\text{m}$, est caractéristique des hautes températures telles que celles l'on peut rencontrer dans certains processus industriels (sidérurgie, production de verre ...) ou encore à la sortie des tuyères d'avions. La seconde zone, entre 3 et $20 \mu\text{m}$ approximativement, correspond aux infrarouges moyens, elle est associée aux problématiques d'isolation thermique et aux procédés industriels. Enfin, la dernière zone allant 20 à $100 \mu\text{m}$ est celle des infrarouges lointains, elle correspond au rayonnement à basse température et est associée aux applications de type cryogénie ou spatiales.

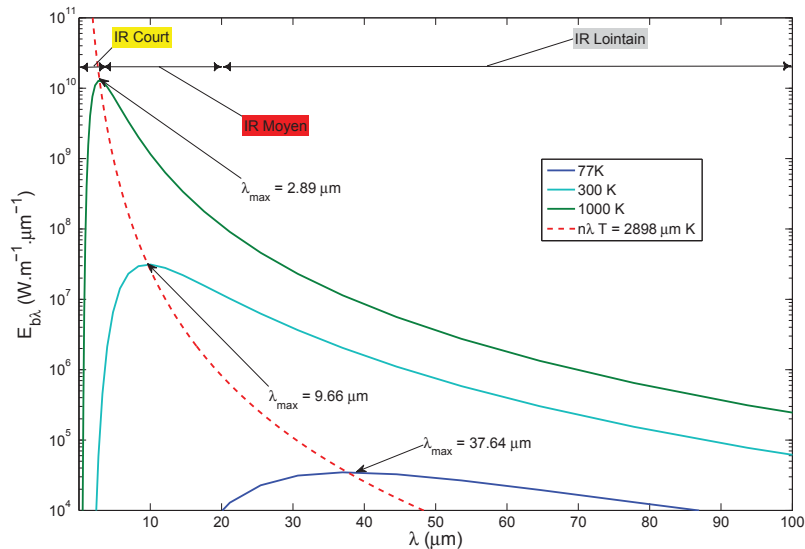


FIGURE 1.7 – Rayonnement du CN et loi du déplacement de Wien dans l'infrarouge

1.3 La loi de Stefan-Boltzmann

La loi de Stefan¹⁰-Boltzmann¹¹, ou plus couramment “loi de Stefan”, permet d’expliquer le flux total rayonné par un corps noir. En rayonnement, une grandeur totale, par opposition à spectrale, correspond à l’intégration de la grandeur spectrale sur tout le spectre de fréquences ou de longueurs d’onde. Cette loi a été dans un premier temps établie de manière expérimentale par Stefan, puis justifiée théoriquement par Boltzmann. Elle stipule que l’émittance totale d’un corps noir à la température T est propor-

10. Joseph Stefan, physicien et mathématicien slovène (1835-1893) - http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Stefan

11. Ludwig Boltzmann, physicien autrichien (1844-1906) - http://en.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Boltzmann

tionnelle à la puissance quatrième de la température. Si l'on intègre l'équation (1.10) entre $[0, \infty[$, il vient :

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{b\lambda}(T) d\lambda = \frac{C_1 n^2 T^4}{C_2^4} \times \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} \quad (1.25)$$

Cette expression fait apparaître les constantes C_1 et C_2 définies précédemment et un terme intégral (tiré de l'équation (1.10)) où l'on a fait le changement de variable $x = C_2/n\lambda T$. Cette intégrale peut être évaluée, on montre que $\int_0^\infty x^3 dx / [\exp(x) - 1] = \pi^4/15$, il en résulte l'expression suivante :

$$E_b(T) = n^2 \sigma T^4 \quad (1.26)$$

où σ est la constante de Stefan.

$$\sigma = \frac{C_1 \pi^4}{15 C_2^4} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c_0^2 h^3} = 5.6706 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \quad (1.27)$$

Fraction de l'émittance du corps noir

Pour de nombreuses applications, il peut être utile de comparer l'émission totale du corps noir E_b à une fraction de celui-ci dans une plage donnée de longueurs d'onde $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Le calcul de la fraction de l'émittance du corps noir, sur le domaine spectral $[0, \lambda]$ se définit simplement comme :

$$F_{0-n\lambda T} = \frac{\int_0^\lambda E_{b,\lambda} d\lambda}{\int_0^\infty E_{b,\lambda} d\lambda} = \frac{\int_0^\lambda E_{b,\lambda} d\lambda}{n^2 \sigma T^4} \quad (1.28)$$

On évalue ainsi une fonction cumulée de la puissance émise (figure (1.8)).

Si l'on utilise l'équation (1.25) on obtient l'expression suivante :

$$F_{0-n\lambda T} = \frac{15}{\pi^4} \int_{C_2/n\lambda T}^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} \quad (1.29)$$

Cette intégrale peut être calculée à partir d'une somme infinie. Un calcul exact de cette intégrale est proposé par Chang et Rhee [6].

$$F_{0-n\lambda T} = \frac{15}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-mx)}{m^4} [6 + 6(mx) + 3(mx)^2 + (mx)^3] \quad (1.30)$$

avec $x = C_2/n\lambda T$.

La convergence de cette somme est très rapide et la sommation peut être tronquée pour $m = 5$. Les figures (1.9 a et b) donnent respectivement l'émittance normée du corps noir et la fraction de l'émittance du corps noir en fonction de λT exprimé en $\mu\text{m} \cdot \text{K}$.

Dans la pratique, on utilisera directement la figure (1.9b) pour estimer la fraction de l'émission d'un corps noir à une température donnée. Le calcul de cette quantité pour la plage spectrale $[\lambda_1, \lambda_2]$ est obtenu par la différence suivante :

$$F_{n\lambda_1 T - n\lambda_2 T} = F_{0-n\lambda_2 T} - F_{0-n\lambda_1 T} \quad (1.31)$$

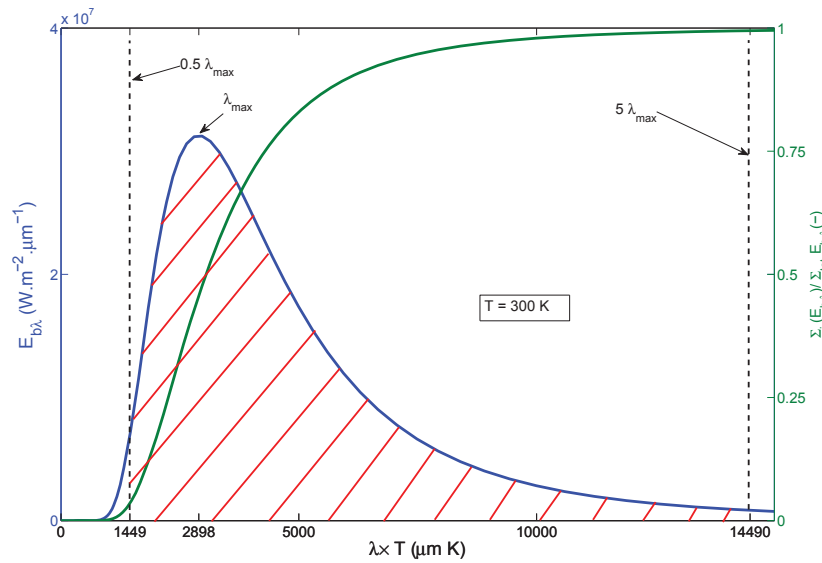
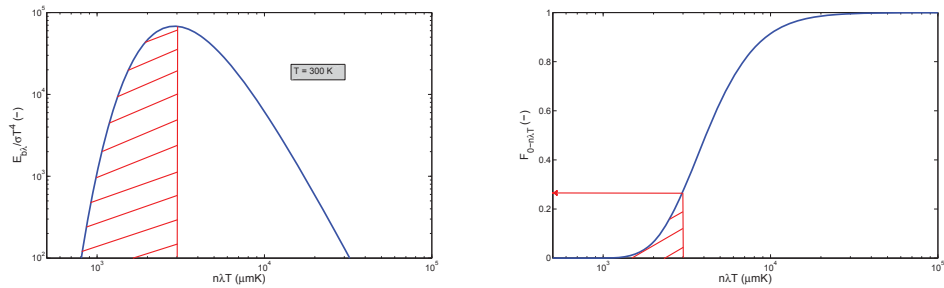


FIGURE 1.8 – Loi de Planck (bleu) et loi de Planck cumulée-normée (vert)



(a) Emittance du corps noir normée à 300 K (b) Fraction de l'émittance du corps noir

FIGURE 1.9 – Corps noir et fraction de l'émittance du corps noir dans une plage de longueurs d'ondes

En particulier, si l'on intègre la loi de Planck dans le domaine spectral $[0.5\lambda_{max}, 5\lambda_{max}]$, on peut montrer que l'on prend en considération 96% de l'énergie totale obtenue par intégration sur l'ensemble du spectre, figure (1.8). Ce critère est souvent retenu pour évaluer la plage spectrale essentielle pour une application pratique, connaissant le niveau de température caractéristique de l'émetteur (qui permet l'estimation de λ_{max} par application de la loi de Wien).

Chapitre 2

Grandeurs usuelles en rayonnement

2.1 Notion de flux

À la base de l'étude des transferts de chaleur, conductifs, convectifs et radiatifs, deux grandeurs sont fondamentales :

⇒ Il y a d'une part la température T qui permet la mesure de l'énergie du système considéré. C'est une variable scalaire qui dépend des coordonnées spatiales et temporelle (x, y, z, t) . La température s'exprime dans différentes échelles de mesures : Celsius, Kelvin, Fahrenheit, Rankine, Réaumur ... Toutefois, en rayonnement on doit impérativement utiliser l'échelle de Kelvin (ou échelle absolue) définie à partir du point triple de l'eau.

⇒ D'autre part, on définit le flux de chaleur \dot{Q} (aussi noté Φ dans de nombreux ouvrages) qui est la puissance thermique échangée par un système. On utilisera plus couramment la notion de densité de flux de chaleur \dot{q}'' (souvent notée φ en français) qui est la puissance ramenée à la surface d'échange S , figure (2.1).

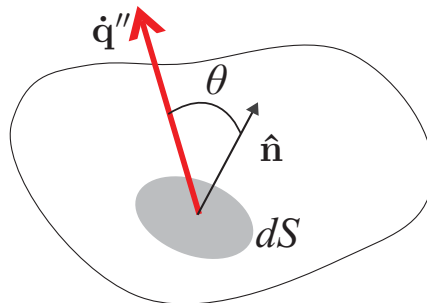


FIGURE 2.1 – Densité de flux de chaleur à travers un élément de surface

Selon ce formalisme une petite variation du flux de chaleur $d\dot{Q}$ à travers un élément de surface dS s'écrit :

$$d\dot{Q} = \dot{\mathbf{q}}'' \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \dot{q}'' \cos \theta dS \quad (2.1)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est la normale à l'élément de surface et θ l'angle entre cette normale et le vecteur densité de flux.

2.2 La luminance

2.2.1 Nature directionnelle du rayonnement

Tout objet qui rayonne est caractérisé comme on l'a vu dans le chapitre 1 par sa température via l'émission du corps noir et par ses propriétés optiques comme on le verra plus loin. Toutefois, si l'on se réfère à quelques exemples bien connus (lampe à incandescence, laser ...) il est aussi notable que le rayonnement a une nature directionnelle. Ainsi, le rayonnement d'une ampoule est globalement isotrope alors que celui d'un laser est fortement directionnel. L'énergie rayonnée par ces systèmes est elle aussi dépendante de la direction d'observation. Il est alors possible d'introduire une grandeur caractérisant la puissance rayonnée dans une direction donnée. On appelle cette grandeur énergétique la luminance.

2.2.2 Luminance spectrale

Considérons un élément de surface dS localisé aux coordonnées $\hat{\mathbf{r}}$ ($\hat{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y + z\hat{\mathbf{e}}_z$). Le flux rayonné par cet élément de surface, dans l'angle solide élémentaire $d\Omega$, centré sur la direction de propagation du rayonnement $\hat{\mathbf{\Omega}}$, dans la plage de longueurs d'onde comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$ est appelé luminance spectrale et noté $I_\lambda(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{\Omega}})$, figure (2.2).

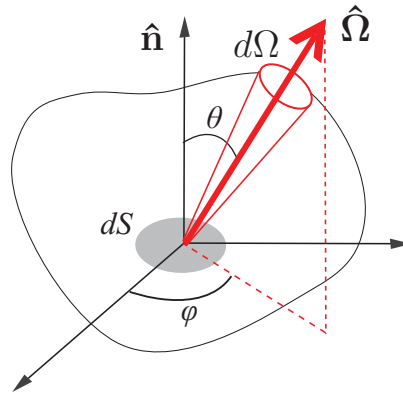


FIGURE 2.2 – Luminance dans la direction $\hat{\mathbf{\Omega}}$

Si on appelle $d^3\dot{Q}_\lambda(\hat{\mathbf{\Omega}})$ cette fraction du flux rayonné (par dS , dans l'angle solide élémentaire $d\Omega$, centré sur la direction de propagation du rayonnement $\hat{\mathbf{\Omega}}$, dans la plage de longueurs d'onde comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$), mathématiquement la luminance s'exprime alors par :

$$I_\lambda(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{\Omega}}) = \frac{d^3\dot{Q}_\lambda(\hat{\mathbf{\Omega}})}{\cos(\theta)dSd\Omega d\lambda} \quad (2.2)$$

avec $\cos(\theta) = \hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

La luminance s'exprime donc en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{sr}^{-1}$, où sr est le "stéradian", l'unité d'angle solide. Dans le cas de problèmes de rayonnement thermique où les longueurs d'onde d'intérêt s'expriment en μm , l'unité de la luminance s'écrit aussi $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \mu\text{m}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$.

Remarque : La notation $I_\lambda(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\Omega})$, est la notation internationale couramment employée du fait de la terminologie anglo-saxonne qui désigne la luminance avec le terme "radiation Intensity". Dans les ouvrages en français la terminologie courante est $L_\lambda(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\Omega})$.

Rappels sur les angles solides

Soit une sphère de rayon R , on définit l'angle solide $d\Omega$ comme la surface $d\Sigma$ interceptée par un cône dont le sommet est situé au centre de la sphère en O , figure (2.3). Par définition on pose :

$$d\Omega = \frac{d\Sigma}{R^2} \quad (2.3)$$

Par extension, on peut intégrer la surface $d\Sigma$ (calotte sphérique) de façon à décrire la surface complète de la sphère S , on en déduit alors que l'angle solide total vaut $\Omega_{tot} = 4\pi$ sr.

$$S = \int_{\Omega_{tot}} d\Sigma = \int_{\Omega_{tot}} R^2 d\Omega = 4\pi R^2 \quad (2.4)$$

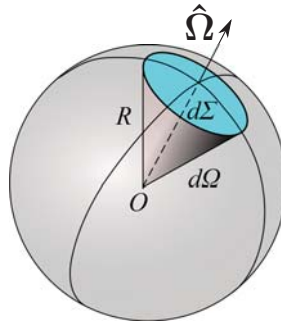


FIGURE 2.3 – Définition de l'angle solide $d\Omega$

Si on suppose que R est suffisamment grand devant $d\Sigma$, c'est-à-dire que l'angle solide est petit, on peut approcher la portion de calotte sphérique par la surface plane dS qui sous-tend $d\Sigma$.

$$d\Omega = \frac{d\Sigma}{R^2} \simeq \frac{dS}{R^2}, \quad \text{si } R \gg d\Sigma \quad (2.5)$$

Si la normale à la surface dS n'est pas colinéaire avec la direction $\hat{\Omega}$ autour de laquelle est centré l'angle solide considéré, figure (2.4), on projette la surface dS dans cette direction. En posant $R = OM$ et $\cos \beta = \hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, il vient :

$$d\Omega = \frac{dS \cos \beta}{R^2} \quad (2.6)$$

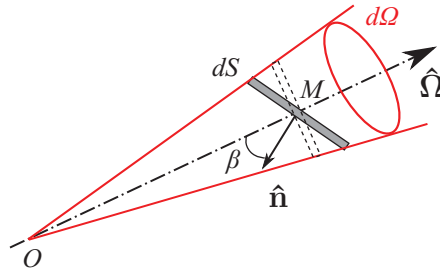
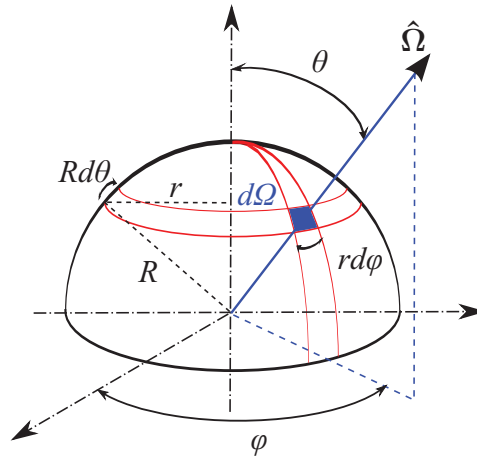


FIGURE 2.4 – Angle solide projeté

L'angle solide peut également être exprimé à l'aide des coordonnées polaires, figure (2.5). Pour une direction $\hat{\Omega}$ repérée par l'angle polaire θ et l'angle azimutal φ , en utilisant l'équation (2.3), on a :

$$d\Omega = \frac{d\Sigma}{R^2} = \frac{Rd\theta rd\varphi}{R^2} = \sin\theta d\theta d\varphi \quad (2.7)$$

FIGURE 2.5 – Angle solide $d\Omega$ en coordonnées polaires

Les notions d'angles solides seront utilisées dans la suite de ce document, notamment pour définir les facteurs de forme utilisés pour caractériser les échanges par rayonnement entre surfaces.

2.2.3 Luminance totale

La luminance totale est l'intégration de la luminance spectrale sur toutes les longueurs d'ondes.

$$I(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\Omega}) = \int_0^{\infty} I_{\lambda}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\Omega}) d\lambda \quad (2.8)$$

$I(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\Omega})$ s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$. Dans la pratique, cette intégration est souvent limitée à un domaine spectral $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ défini par le niveau de température considéré comme cela a été évoqué dans le paragraphe 1.3.

2.3 Densité de flux rayonnée

La densité de flux rayonnée \dot{q}'' , ou “flux radiatif” (appellation courante qui est un abus de langage ici car il s’agit bien d’une densité de flux en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$), est la puissance rayonnée ramenée à l’unité de surface. Elle est obtenue en considérant, dans toutes les directions de l’espace, le flux rayonné arrivant et/ou quittant un élément de surface, figure (2.6).

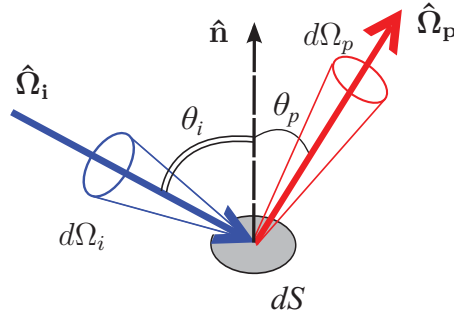


FIGURE 2.6 – Flux radiatif sur un élément de surface, directions “incidente” et “partante”

Le flux incident à la surface est compté négativement ($\hat{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0$), en revanche le flux partant de la surface est compté positivement ($\hat{\Omega}_p \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0$). On définit le flux spectral radiatif net (noté \dot{q}''_λ ou $\dot{q}''_{\lambda \text{ net}}$) comme la somme de ces deux quantités.

$$\dot{q}''_\lambda = \dot{q}''_{\lambda i} + \dot{q}''_{\lambda p} = \dot{\mathbf{q}}''_i \cdot \hat{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{q}}''_p \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.9)$$

Si l’on utilise la notion de luminance, cette quantité intégrée sur toutes les directions de propagation devient :

$$\dot{q}''_\lambda = \int_{\Omega=4\pi} I_\lambda(\hat{\Omega}) \hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Omega = \int_{\Omega=4\pi} I_\lambda(\hat{\Omega}) \cos \theta d\Omega \quad (2.10)$$

sur la base de ce qui a été vu dans le paragraphe précédent, la densité de flux total rayonné résulte de l’intégration de l’équation (2.10) sur tout le spectre de longueur d’ondes.

$$\dot{q}'' = \int_0^\infty \int_{\Omega=4\pi} I_\lambda(\hat{\Omega}) \cos \theta d\Omega d\lambda \quad (2.11)$$

2.3.1 Émittance

La notion d’émittance a été abordée dans le chapitre 1 avec la loi de Planck et l’émittance du corps noir $E_{b\lambda}$. Cette notion peut être étendue à une surface quelconque. L’émittance spectrale E_λ est le flux rayonné par un élément de surface dS dans tout “l’espace avant”, c’est à dire pour toutes les directions telles que $\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0$, figure (2.7).

Note : attention à ne pas confondre la grandeur présentée ici, homogène à une densité de flux radiatif, avec la caractéristique sans dimension qui sera évoquée plus loin lorsque nous discuterons des propriétés d’émission mesurées en surface de milieux rayonnants.

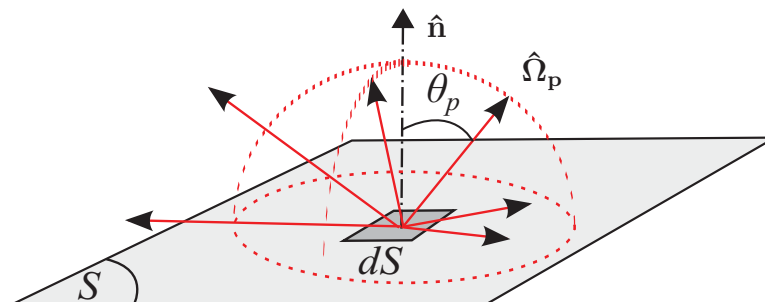


FIGURE 2.7 – Émittance spectrale non isotrope

L'intégration sur le demi-espace avant ($\Omega = 2\pi$ sr) est déduite de l'équation (2.10) qui donne le flux radiatif dans tout l'espace.

$$E_\lambda = \int_{\hat{\Omega}_p \cdot \hat{n} > 0} I_\lambda(\hat{\Omega}_p) \cos(\theta_p) d\Omega_p \quad (2.12)$$

Les notions d'émittance et d'émittance du corps noir seront reprises dans la section 2.4 dédiée aux propriétés optiques, de surface, des matériaux et en l'occurrence pour définir l'émissivité.

Émittance spectrale isotrope

Certaines surfaces émettent de façon isotrope ou “Lambertienne” (d'après J.H. Lambert¹), c'est-à-dire que la luminance, dans toutes les directions de l'espace avant ($\hat{\Omega} \cdot \hat{n} > 0$), est indépendante des coordonnées angulaires (θ, φ). Dans ces conditions $I(\hat{r}, \hat{\Omega}) = I(\hat{r})$ et la formulation intégrale de l'émittance (équation (2.12)) peut être calculée indépendamment de la luminance en utilisant la définition de l'angle solide en coordonnées polaires (équation (2.7)).

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \int_{\hat{\Omega}_p \cdot \hat{n} > 0} I_\lambda \cos \theta_p d\Omega_p \\ &= I_\lambda \int_{\varphi_p=0}^{2\pi} \int_{\theta_p=0}^{\pi/2} \cos \theta_p \sin \theta_p d\theta_p d\varphi_p \\ E_\lambda &= \pi I_\lambda \end{aligned} \quad (2.13)$$

Remarque : L'émission de rayonnement par un corps noir est par nature isotrope (paragraphe 1.2.3). La loi de Planck qui donne $E_{b\lambda}$ l'émittance du corps noir permet alors de définir la luminance du corps noir $I_{b\lambda}$ à l'aide de la relation (2.13) :

$$I_{b\lambda} = \frac{E_{b\lambda}}{\pi} \quad (2.14)$$

1. Johann Heinrich Lambert² mathématicien suisse (1728-1777) - http://fr.wikipedia.org/wiki/Jean-Henri_Lambert

2.3.2 Éclairement

Si l'émittance permet de définir la densité de flux émise par une surface, l'éclairement désigne de manière analogue la densité de flux reçu par une surface. Considérant le flux rayonné arrivant sur un élément de surface dS en provenance de toutes les directions de l'espace, figure (2.8), l'expression donnant l'éclairement en fonction de la luminance est similaire à celle donnée par l'équation (2.12), seules les bornes d'intégration changent :

$$H_\lambda = \int_{\hat{\Omega}_i, \hat{n} < 0} I_\lambda(\hat{\Omega}_i) \cos \theta_i d\Omega_i \quad (2.15)$$

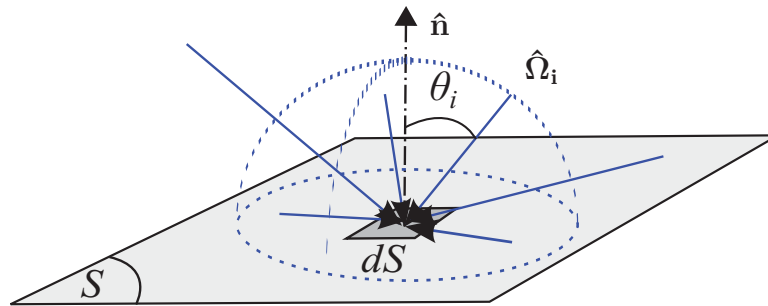


FIGURE 2.8 – Éclairement spectral non isotrope

Les notions d'émittance et d'éclairement, permettent d'établir des bilans de flux rayonnés sur et par une surface. Elles seront reprises dans la suite de ce cours pour définir la notion de radiosité.

2.4 Propriétés optiques des surfaces

Le flux rayonné par une surface, qu'elle soit noire ou quelconque, a été défini dans les paragraphes précédents dans différents cas : rayonnement directionnel ou hémisphérique, spectral ou total. Pour caractériser la capacité d'une surface (ou d'un milieu) à émettre, absorber, ou réfléchir le rayonnement, à une température donnée, on définit des coefficients, propres aux matériaux et à la nature de leur surface. La définition de ces propriétés radiatives fait l'objet des paragraphes suivants.

2.4.1 Émissivité

L'émissivité traduit l'aptitude d'une surface opaque à la température T à émettre du rayonnement, à une longueur d'onde et dans une direction données. Plus précisément on parle d'émissivité spectrale directionnelle ϵ'_λ si la grandeur énergétique associée à la définition de l'émissivité est la luminance $I_\lambda(\hat{\Omega}, T)$ de la surface, ramenée à la grandeur de référence : la luminance du corps noir à la même température $I_{b\lambda}(T)$

$$\epsilon'_\lambda = \frac{I_\lambda(\hat{\Omega}, T)}{I_{b\lambda}(T)} \quad (2.16)$$

L'émissivité est donc comprise entre 0 et 1, avec pour un corps noir $\epsilon'_\lambda = 1$. Selon la nature des matériaux, mais aussi en fonction de l'état de surface, l'émissivité ϵ'_λ peut varier directionnellement à une longueur d'onde donnée. On distingue notamment les cas des matériaux diélectriques et des métaux. L'indicatrice d'émission décrit ces évolutions relativement à la normale à la surface considérée (voir par exemple les indicatrices types proposées sur la figure (2.9)). Pour les diélectriques, l'émissivité est généralement plus importante que pour les métaux et le maximum d'émission se situe en incidence normale. Pour les métaux, l'émissivité est souvent faible, sauf si l'état de surface est modifié (oxydation ...). Pour les diélectriques, on a un comportement Lambertien pour les directions proches de la normale à la surface, tandis que pour les angles d'incidence rasants, il y a une forte diminution de l'émissivité.

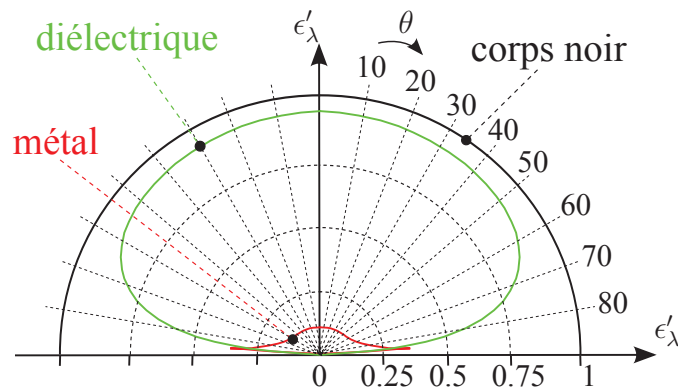


FIGURE 2.9 – Émissivité spectrale directionnelle de différents matériaux

Dans la plupart des bases de données, l'émissivité est donnée en terme de grandeur moyenne dite "hémisphérique", notée ϵ_λ^\square . Il s'agit du rapport de l'émittance spectrale du matériau à l'émittance spectrale du corps noir à la même température.

$$\epsilon_\lambda^\square = \frac{E_\lambda(T)}{E_{b\lambda}(T)} \quad (2.17)$$

On parle ici de surface opaque, mais on peut définir le rapport de flux ci-dessus pour tout matériau, y compris des milieux semi-transparents dont le rayonnement mesuré en surface vient aussi de l'intérieur du milieu lui-même. C'est dans ce cas que l'on utilise l'appellation "émittance" plutôt que "émissivité" pour caractériser le milieu (émittance, grandeur sans dimension ici). De manière générale on trouvera le suffixe "-ivité" pour toute propriété optique concernant la surface d'un milieu semi-infini (disons un dioptre) et on utilisera le suffixe "-ance" lorsque l'on caractérisera le rayonnement en surface d'un milieu fini (avec des effets possibles de rayonnement en profondeur, ou de réflexions multiples aux interfaces affectant la propriété mesurée) ou encore lorsque le milieu, hétérogène par exemple, présente des propriétés influencées par sa topologie (présence d'inclusions, multi-couches, etc...).

Corps gris

Dans le cas d'un matériau dont l'émissivité ne varie pas avec la longueur d'onde, on parle de milieu "gris" (ou de surface grise) et les émissivités directionnelle et hémisphérique

deviennent :

$$\epsilon' = \frac{I(\hat{\Omega}, T)}{I_b(T)} \quad (2.18)$$

$$\epsilon = \epsilon^\cap = \frac{E(T)}{E_b(T)} \quad (2.19)$$

La notion de corps gris est une vision idéalisée des propriétés des matériaux. Au mieux, la variation spectrale est modérée, ou négligeable dans une plage de longueurs d'onde donnée. On peut aussi calculer des propriétés moyennes par intégration sur le spectre de longueurs d'onde et les garder constantes en définissant une sorte de milieu gris équivalent. Dans la réalité, les matériaux présentent des bandes d'absorption liées aux vibrations des atomes et molécules les constituant. Si l'on représente l'émittance (la densité de flux émis) en fonction de la longueur d'onde pour un corps noir, un corps gris et un corps "réel" à une même température, on observe typiquement les évolutions présentées sur la figure (2.10).

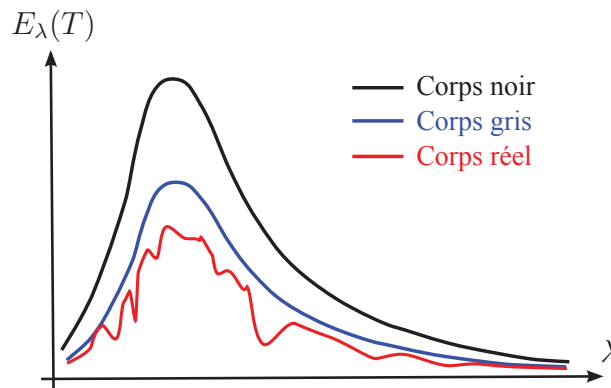


FIGURE 2.10 – Émittance spectrale de différents matériaux

2.4.2 Interaction du rayonnement avec un matériau

L'émissivité est une des propriétés radiatives de surface des matériaux. Elle permet de définir le rayonnement émis (en lien avec la température de surface). D'autres grandeurs permettent également de caractériser le comportement d'un matériau vis-à-vis du rayonnement qu'il reçoit. On définit ainsi la réflectivité, l'absorptivité et la transmittivité lorsque l'on caractérise une surface (et on préférera la dénomination de réflectance, absorptance - ou facteur d'absorption - et transmittance lorsque l'on parlera des propriétés d'un volume soumis à un rayonnement incident). Ces grandeurs peuvent être obtenues à partir d'un bilan d'énergie sur les flux incident, réfléchi, absorbé et transmis par un matériau, figure (2.11).

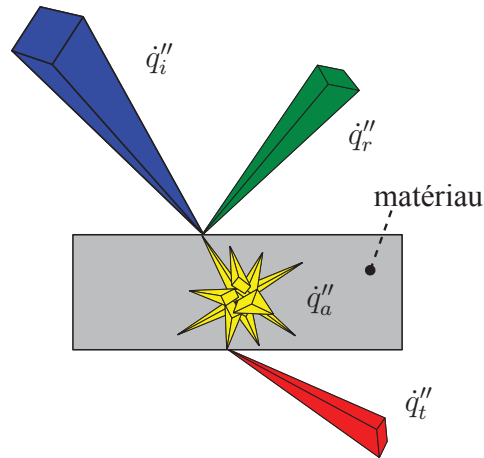


FIGURE 2.11 – Flux incident, réfléchi, absorbé et transmis par un matériau

La conservation de l'énergie stipule :

$$\dot{q}_r'' + \dot{q}_a'' + \dot{q}_t'' = \dot{q}_i'' \quad (2.20)$$

$$\frac{\dot{q}_r''}{\dot{q}_i''} + \frac{\dot{q}_a''}{\dot{q}_i''} + \frac{\dot{q}_t''}{\dot{q}_i''} = 1$$

$$\Rightarrow \rho + \alpha + \tau = 1 \quad (2.21)$$

où ρ est la réflectance, α l'absorptance et τ la transmittance. Ce sont des grandeurs sans dimension au même titre que l'émissivité ou l'émittance telle que définie plus haut. Dans le cas présent, ce sont les grandeurs totales et hémisphériques qui sont notées dans l'équation (2.21), plus généralement ces grandeurs peuvent être spectrales et directionnelles comme l'émissivité.

Réflectivité

La réflectivité ρ est une propriété de surface importante dans la mesure où elle intervient fréquemment dans le calcul des conditions aux limites d'un problème radiatif. A la base c'est une grandeur directionnelle et spectrale, notée ρ'_λ . La réflectivité d'un matériau dépend des propriétés optiques de celui-ci à travers son indice optique complexe $m = n + ik$ (cf convention évoquée plus haut). Dans l'air, en incidence normale, les angles d'incidence et de réflexion par rapport à la normale à la surface sont nuls ($\theta_i = \theta_r = 0$) et la réflectivité peut être calculée à l'aide de la relation suivante (voir cours spécifique introduisant les relations de Fresnel) :

$$\rho'_{n\lambda} = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2} \quad (2.22)$$

L'indice n est utilisé pour signifier qu'il s'agit de la réflectivité en incidence normale. La relation équivalente en incidence oblique est plus complexe mais s'obtient également à partir de l'approche électromagnétique (elle sera présentée dans les cours spécialisés sur l'interaction rayonnement-matière).

La réflectivité est aussi fonction de l'état de surface du matériau, notamment de la taille des rugosités vis-à-vis de la longueur d'onde. Dans le cas de surfaces lisses ou encore quand la dimension caractéristique de la rugosité est petite devant la longueur d'onde la réflexion est dite "spéculaire", figure (2.12a). En revanche, quand la surface sur laquelle se réfléchit le rayonnement a une rugosité grande devant la longueur d'onde la réflexion est diffuse, figure (2.12b). Dans la pratique, la réflectivité des surfaces réelles se situe

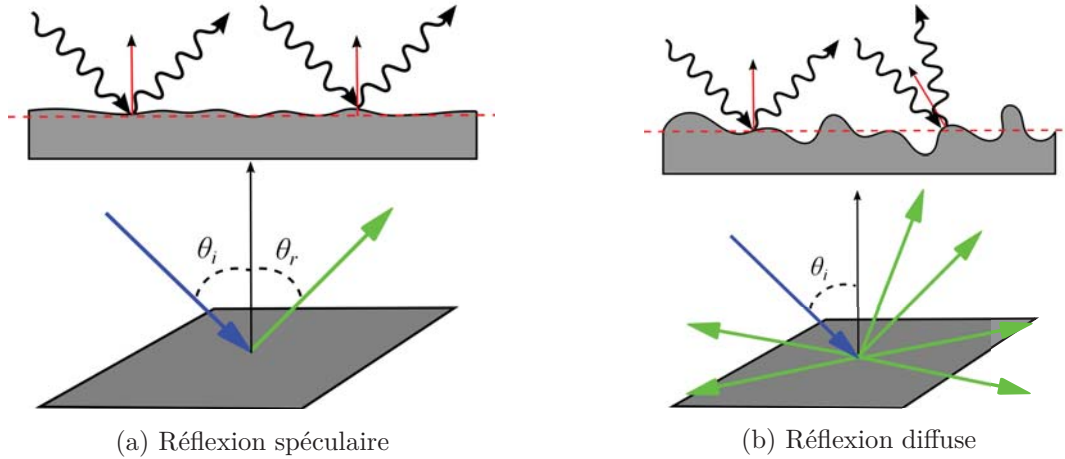


FIGURE 2.12 – Réflexions spéculaire et diffuse selon l'état de surface

entre ces deux extrêmes. Plus d'informations à ce sujet peuvent être obtenues dans le livre de M. Modest [7] et dans les cours spécialisés qui suivront.

Absorptivité et loi de Kirchhoff

L'absorptivité n'est pas à proprement parler uniquement une propriété de surface dans la mesure où cette quantité dépend du rayonnement incident sur le matériau et de la longueur d'onde considérée. Toutefois, si l'on revient à la définition de cette quantité eq. (2.21), on peut écrire à partir de la définition de la luminance dans une direction donnée (eq. (2.2) et eq. (2.10)) l'absorptivité spectrale directionnelle α'_λ .

$$\alpha'_\lambda = \frac{I_{abs,\lambda}(\hat{\Omega}) \cos \theta_i d\Omega_i}{I_\lambda(\hat{\Omega}) \cos \theta_i d\Omega_i} \quad (2.23)$$

où $I_{abs,\lambda}(\hat{\Omega})$ est la fraction de la luminance incidente absorbée à la surface.

En utilisant la définition de l'éclairement donné par l'équation (2.15), on peut réécrire l'expression précédente sous une forme analogue à celle de l'émissivité, eq. (2.16).

$$\alpha'_\lambda = \frac{H'_{abs,\lambda}}{H'_\lambda} \quad (2.24)$$

où H'_λ est l'éclairement "directionnel" sur la surface et $H'_{abs,\lambda}$ la quantité absorbée.

La loi de Kirchhoff relie les propriétés d'absorption et d'émission des corps. Pour cela, on considère un objet, suffisamment petit, placé au sein d'une enceinte supposée noire à la

longueur d'onde λ et parfaitement réfléchissante dans le reste du spectre, figure (2.13). Par ailleurs, le système (enceinte+matériau) est en équilibre radiatif à la température T . On peut écrire les densités de flux émis et absorbé par une surface élémentaire dS , à la longueur d'onde λ dans l'angle solide $d\Omega$ autour de la direction $\hat{\Omega}$ du matériau dans l'enceinte :

$$\dot{q}_{\text{émis}}'' = \epsilon'_{\lambda} I_{b\lambda}(T) \cos \theta d\lambda d\Omega \quad (2.25)$$

$$\dot{q}_{\text{abs}}'' = \alpha'_{\lambda} I_{b\lambda}(T) \cos \theta d\lambda d\Omega \quad (2.26)$$

À l'équilibre radiatif, ces densités de flux sont égales, il vient alors :

$$\alpha'_{\lambda} = \epsilon'_{\lambda} \quad (2.27)$$

Cette égalité de l'absorptivité directionnelle spectrale avec l'émissivité directionnelle spectrale à une température donnée (équilibre thermodynamique local) est appelée "loi de Kirchhoff".

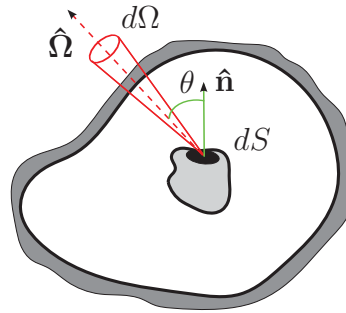


FIGURE 2.13 – Corps dans une enceinte en équilibre radiatif

La loi de Kirchhoff peut être généralisée aux surfaces "diffuses", c'est-à-dire pour lesquelles il n'y a pas de dépendance directionnelle de l'émission de rayonnement.

$$\alpha_{\lambda} = \epsilon_{\lambda} \quad (2.28)$$

La généralisation à des surfaces grises (dont les propriétés optiques sont supposées indépendantes de la longueur d'onde) est théoriquement possible, mais relève plutôt du cas d'école. L'approximation courante consiste alors à écrire $\alpha = \epsilon$, mais il faut garder à l'esprit que seule la formulation spectrale directionnelle (2.27) est rigoureuse.

Transmittivité

La transmittivité est la troisième grandeur qui permet de caractériser les propriétés radiatives d'une surface. Elle peut être déduite de la connaissance de α'_{λ} et de ρ'_{λ} . Il est également possible de déterminer la transmittivité par la résolution des équations de Maxwell (voir cours spécialisés).

Le phénomène de réfraction implique un changement de direction au passage entre deux milieux d'indices différents. La relation entre les angles et les indices de chaque côté de

l'interface est la relation de Snell³-Descartes⁴.

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \quad (2.29)$$

θ_i et θ_t désignant les angles d'incidence et de transmission, n_i et n_t les indices des milieux correspondant.

Par ailleurs, compte tenu de ce qui a été vu précédemment, si $\tau_\lambda = 0$, le milieu est dit "opaque" et on a :

$$\alpha_\lambda + \rho_\lambda = 1 \quad (2.30)$$

Cette relation couplée à la loi de Kirchhoff est utile pour définir les conditions aux limites d'un problème radiatif en fonction de l'émissivité seule. Couramment, pour une surface opaque à propriétés diffuses on écrit : $\rho_\lambda = 1 - \epsilon_\lambda$.

Enfin, si $\tau_\lambda = 1$ alors $\alpha_\lambda = \rho_\lambda = 0$ et le milieu est dit "transparent".

3. Willebrord Snell, physicien et mathématicien néerlandais (1580-1626) - http://fr.wikipedia.org/wiki/Willebrord_Snell

4. René Descartes, physicien, mathématicien et philosophe français (1596-1650) - http://fr.wikipedia.org/wiki/René_Descartes

Chapitre 3

Échanges entre surfaces - Milieu transparent

Dans ce chapitre, on présente la notion d'échange radiatif entre surfaces, noires ou grises, séparées par un milieu transparent à l'aide des facteurs de forme. C'est la technique la plus simple pour considérer le rayonnement échangé entre différents objets. Néanmoins, cette technique permet de traiter un grand nombre de problèmes d'ingénierie lorsque le milieu dans lequel se propage le rayonnement ne participe pas ou tout du moins participe peu aux échanges radiatifs.

3.1 Échanges entre surfaces noires - Facteur de forme

Soient deux surfaces noires S_1 et S_2 , respectivement aux températures T_1 et T_2 séparées par du vide, figure (3.1). On considère dS_1 et dS_2 deux éléments de surface, séparés de la distance d , appartenant à S_1 et S_2 et qui se voient sous les angles solides $d\Omega_1$ et $d\Omega_2$.

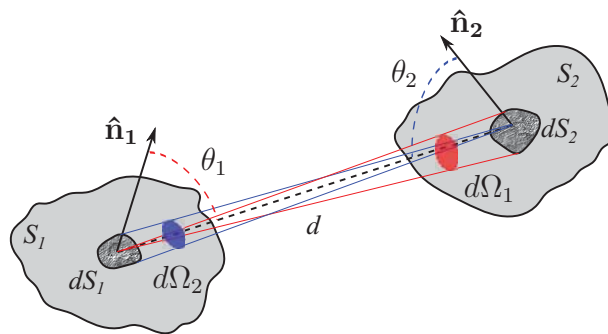


FIGURE 3.1 – Échanges radiatifs entre deux surfaces noires

On travaille dans ce qui suit en rayonnement total, mais on pourrait de même traiter le

cas spectral avec une formulation adaptée de la luminance. Le flux rayonné de dS_1 vers dS_2 est donné en fonction de la luminance du corps noir en partant de l'équation (2.2). Il s'écrit ici :

$$d^2\dot{Q}_{12} = I_b(T_1) \cos \theta_1 dS_1 d\Omega_1 \quad (3.1)$$

L'angle solide élémentaire $d\Omega_1$ sous lequel est vue la surface dS_2 distante de d peut s'exprimer à l'aide l'équation (2.6). En outre, la surface est noire, donc diffuse en émission et $E_b(T_1) = \pi I_b(T_1)$. L'expression précédente peut alors être réécrite sous la forme suivante :

$$d^2\dot{Q}_{12} = E_b(T_1) \frac{\cos \theta_1 dS_1 \cos \theta_2 dS_2}{\pi d^2} \quad (3.2)$$

En intégrant sur les surfaces S_1 et S_2 on obtient la puissance rayonnée de S_1 vers S_2 :

$$\dot{Q}_{12} = \int_{S_1} \int_{S_2} E_b(T_1) \frac{\cos \theta_1 dS_1 \cos \theta_2 dS_2}{\pi d^2} \quad (3.3)$$

L'émittance du corps noir à la température T_1 est indépendante des considérations géométriques (angles, distances et surfaces). De plus, le flux rayonné de 1 vers 2 est directement proportionnel à la surface émettrice S_1 , il peut donc s'écrire sous une forme plus compacte :

$$\dot{Q}_{12} = S_1 E_b(T_1) F_{12} \quad (3.4)$$

qui fait apparaître un facteur F_{12} appelé "facteur de forme de S_1 vers S_2 " qui contient toute l'information "géométrique" sur la quantité d'énergie quittant S_1 qui sera interceptée par S_2 . Il est défini par l'intégrale double suivante :

$$F_{12} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 dS_1 \cos \theta_2 dS_2}{\pi d^2} \quad (3.5)$$

Une autre définition du facteur de forme F_{12} est donc le rapport entre la puissance rayonnée quittant la surface S_1 qui sera intercepté par la surface S_2 sur tout le flux rayonné par S_1 : $\dot{Q}_1 = S_1 E_b(T_1)$.

$$F_{12} = \frac{\dot{Q}_{12}}{\dot{Q}_1} \quad (3.6)$$

De manière générale, entre deux éléments de surface dS_1 , et dS_2 suffisamment petits, distants de d , on a l'expression :

$$F_{dS_1 dS_2} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi d^2} dS_2 \quad (3.7)$$

Les facteurs de formes se calculent analytiquement dans le cas de géométries "simples", l'article de synthèse d'Howell et Mengüç [8] en propose une liste exhaustive. Dans le cas de géométries plus complexes on les trouve également sous forme d'abaques. Pour les configurations plus compliquées, un calcul du type "lancer de rayons" permet aussi de les évaluer en exploitant la relation (3.6).

3.1.1 Relations entre facteurs de forme

Il existe plusieurs relations algébriques entre les facteurs de forme qui permettent de les manipuler simplement dans des calculs d'échanges radiatifs.

Réciprocité

Si on reprend le raisonnement exposé dans la section précédente, on peut calculer de manière analogue le flux rayonné de la surface S_2 vers la surface S_1 en fonction de l'émittance du corps noir à la température T_2 , de la surface émettrice S_2 et d'un facteur de forme de S_2 vers S_1 F_{21} . Ce dernier s'écrira :

$$F_{21} = \frac{1}{S_2} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 dS_1 \cos \theta_2 dS_2}{\pi d^2} \quad (3.8)$$

En comparant les équations (3.5) et (3.8) il vient directement :

$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21} \quad (3.9)$$

Que l'on appelle relation de réciprocité.

Surfaces co-planaires

Dans le cas de deux surfaces S_1 et S_2 appartenant à un même plan, celles-ci ne se "voient pas", figure (3.2).

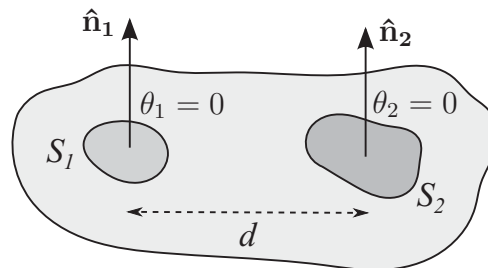


FIGURE 3.2 – Facteur de forme pour des surfaces co-planaires

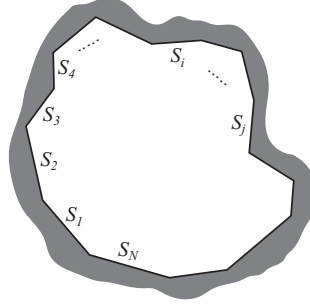
Dans cette configuration le facteur de forme est nul ($F_{12} = 0$). Il en va de même quand on considère le facteur de forme d'une surface non concave avec elle même ($F_{ii} = 0$).

Enceinte fermée

On considère une enceinte de géométrie quelconque constituée de N surfaces noires notées S_i , avec $i \in [1, N]$, figure (3.3).

En utilisant la définition du facteur de forme entre deux surfaces noires S_i et S_j , eq. (3.6), on a :

$$\dot{Q}_{ij} = F_{ij} \dot{Q}_i \quad (3.10)$$

FIGURE 3.3 – Enceinte fermée constituée de N surfaces noires S_i

Le flux total émis par la surface S_i vers les N surfaces de l'enceinte s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_i &= \sum_{j=1}^N \dot{Q}_{ij} & (3.11) \\
 &= \sum_{j=1}^N S_i E_b(T_i) F_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^N F_{ij} \dot{Q}_i \\
 &= \dot{Q}_i \sum_{j=1}^N F_{ij}
 \end{aligned}$$

On vérifie alors l'égalité :

$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1 \quad (3.12)$$

Également appelée relation d'additivité.

Remarque : Dans le cas de deux plans infinis et parallèles en regard, on vérifie également : $F_{12} = F_{21} = 1$. On parle de surfaces en influence totale. En pratique on considère souvent qu'il suffit que la distance séparant deux surfaces identiques parallèles soit petite devant leurs dimensions pour appliquer cette relation.

Additivité

Soient deux surfaces S_i et S_j rayonnant l'une vers l'autre. Supposons qu'elles puissent être décomposées à l'aide de deux sous-surfaces chacune, de telle sorte que $S_i = S_{i1} + S_{i2}$ et $S_j = S_{j1} + S_{j2}$, figure (3.4).

Le facteur de forme entre les surfaces S_i et S_j , S_{j1} et S_{j2} s'écrit selon la définition

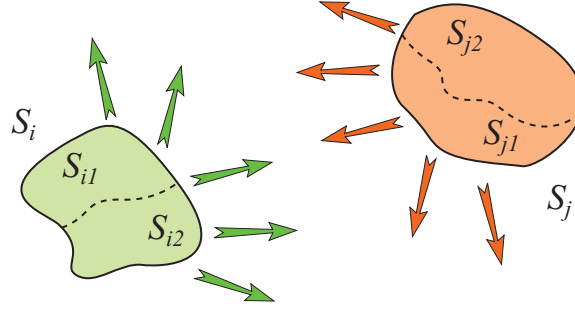


FIGURE 3.4 – Facteur de forme, additivité

donnée par l'équation (3.5) :

$$S_i F_{ij} = \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \theta_i dS_i \cos \theta_j dS_j}{\pi d^2} \quad (3.13)$$

$$S_i F_{ij1} = \int_{S_i} \int_{S_{j1}} \frac{\cos \theta_i dS_i \cos \theta_{j1} dS_{j1}}{\pi d^2} \quad (3.14)$$

$$S_i F_{ij2} = \int_{S_i} \int_{S_{j2}} \frac{\cos \theta_i dS_i \cos \theta_{j2} dS_{j2}}{\pi d^2} \quad (3.15)$$

La somme des deux intégrales données par les équations (3.14) et (3.15) conduit naturellement au résultat suivant :

$$\begin{aligned} S_i F_{ij} &= S_i F_{ij1} + S_i F_{ij2} \\ F_{ij} &= F_{ij1} + F_{ij2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

La décomposition fonctionne parce que l'on a considéré une surface de départ unique, et c'est la surface cible que l'on a décomposée. En revanche, le découpage de la surface de départ ($S_i = S_{i1} + S_{i2}$) ne permet pas d'obtenir une décomposition aussi simple :

$$F_{ij} \neq F_{i1j} + F_{i2j} \quad (3.17)$$

La raison est que le même travail sur les intégrales conduit en fait à $S_i F_{ij} = S_{i1} F_{i1j} + S_{i2} F_{i2j}$ et qu'on ne peut pas simplifier par les surfaces. On retrouve d'ailleurs ce résultat en utilisant la relation de réciprocité, équation (3.9) :

$$\begin{aligned} S_i F_{ij} &= S_j F_{ji} \\ &= S_j (F_{ji1} + F_{ji2}) \\ &= S_{i1} F_{i1j} + S_{i2} F_{i2j} \\ F_{ij} &= \frac{S_{i1} F_{i1j} + S_{i2} F_{i2j}}{S_i} \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.1.2 Flux net échangé entre surfaces noires

En utilisant le formalisme des facteurs de formes, on peut exprimer le flux radiatif échangé par deux ou plusieurs surfaces en regard. On définit le "flux net" échangé entre

deux surfaces S_1 et S_2 comme le bilan entre le flux “quittant” S_1 et allant vers S_2 moins le flux “arrivant” de S_2 sur S_1 :

$$\dot{Q}_{12net} = \dot{Q}_{12} - \dot{Q}_{21} \quad (3.19)$$

Cette expression peut être reformulée à partir de l'émittance du corps noir et des facteurs de formes associés à la configuration géométrique étudiée :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{12net} &= S_1 E_b(T_1) F_{12} - S_2 E_b(T_2) F_{21} \\ &= S_1 F_{12} [E_b(T_1) - E_b(T_2)] = S_2 F_{21} [E_b(T_1) - E_b(T_2)] \\ \dot{Q}_{12net} &= S_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = S_2 F_{21} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \end{aligned} \quad (3.20)$$

On généralise cette écriture pour une enceinte constituée de N surfaces noires, figure (3.3). Dans ce cas, le flux net sur une surface S_i est la différence :

$$\dot{Q}_{inet} = \dot{Q}_i - \sum_{j=1}^N \dot{Q}_{ji} \quad (3.21)$$

où \dot{Q}_i est le flux total issu de S_i et \dot{Q}_{ji} les flux rayonnés par les N surfaces S_j vers S_i . On réécrit le flux net \dot{Q}_{inet} comme précédemment, il vient alors :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{inet} &= S_i E_b(T_i) - \sum_{j=1}^N S_j E_b(T_j) F_{ji} \\ &= S_i E_b(T_i) - S_i \sum_{j=1}^N E_b(T_j) F_{ij} \\ &= S_i E_b(T_i) \underbrace{\sum_{j=1}^N F_{ij}}_{=1} - S_i \sum_{j=1}^N E_b(T_j) F_{ij} \\ \dot{Q}_{inet} &= \sum_{j=1}^N S_i F_{ij} [E_b(T_i) - E_b(T_j)] = \sum_{j=1}^N \dot{Q}_{ijnet} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Si le flux net radiatif est nul, il y a équilibre entre la puissance émise et la puissance reçue. En revanche, si $\dot{Q}_{inet} < 0$ la surface reçoit plus d'énergie qu'elle n'en émet et va donc s'échauffer. Respectivement, elle se refroidit si $\dot{Q}_{inet} > 0$.

3.2 Échanges entre surfaces grises diffusantes - Radiosité

On rappelle qu'une surface grise diffusante est une surface dont les propriétés d'émission, d'absorption et de réflexion sont indépendantes de la longueur d'onde (grise) et de la direction (diffusante). Dans le cas présent, on suppose également que les surfaces sont opaques, on a alors :

$$\begin{aligned} \alpha + \rho &= 1 \\ \epsilon &= \alpha \\ \rho &= 1 - \epsilon \end{aligned}$$

3.2.1 Radiosité

Pour une surface grise et diffusante, la radiosité, notée J correspond à la densité de flux rayonné par la surface. La figure (3.5) décrit une telle surface, à la température T , soumise à l'éclairement H . La radiosité, est donc la contribution de deux quantités :

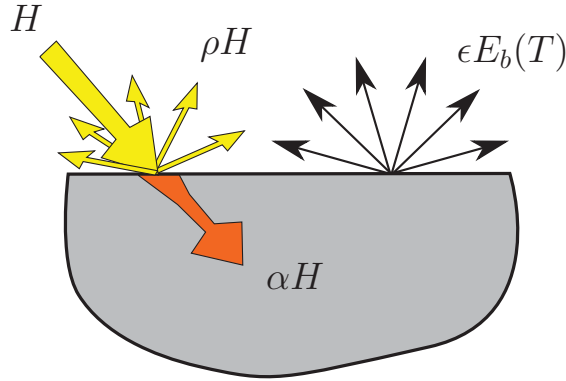


FIGURE 3.5 – Bilan radiatif sur une surface

l'émission propre de la surface à la température T et la part du flux reçu (H) qui sera réfléchi par la surface.

$$J = \epsilon E_b(T) + \rho H \quad (3.23)$$

$$J = \epsilon E_b(T) + (1 - \epsilon)H \quad (3.24)$$

On remarque que si l'émissivité vaut 1, la surface considérée est noire et la radiosité est égale à l'émittance à la température T .

3.2.2 Flux net sur une surface grise diffusante

En utilisant la notion de radiosité on peut expliciter assez simplement le flux net sur une surface grise S_i , telle que celle présentée sur la figure (3.5). Par définition on a :

$$\dot{Q}_{i\ net} = \dot{Q}_{quittant\ S_i} - \dot{Q}_{arrivant\ sur\ S_i} \quad (3.25)$$

Le flux quittant la surface étant composé d'une part émise et d'une part réfléchi, tandis que le flux incident correspond à la somme de ce qui est absorbé ou réfléchi, on en déduit :

$$\dot{Q}_{i\ net} = \dot{Q}_{i\ emis} - \dot{Q}_{i\ abs} \quad (3.26)$$

Soit en utilisant les relations précédentes :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{i\ net} &= [\epsilon_i E_b(T_i) - \alpha_i H_i] S_i \\ &= \epsilon_i [E_b(T_i) - H_i] S_i \quad \text{avec} \quad H_i = \frac{J_i - \epsilon_i E_b(T_i)}{1 - \epsilon_i} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \dot{Q}_{i\ net} &= \frac{\epsilon_i S_i}{(1 - \epsilon_i)} [E_b(T_i) - J_i] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Cette expression sera utilisée dans la suite pour définir le facteur de forme “gris” associé à deux surfaces grises et diffusantes en regard. Elle est également utile pour la résolution de problèmes de cavités, de type fours, associant plusieurs surfaces grises.

3.2.3 Échanges entre deux surfaces grises diffusantes

Dans le cas, plus général, de deux surfaces grises en regard, la notion de facteur de forme établie à l’aide de deux corps noirs qui se font face n’est plus applicable. On peut toutefois estimer le flux net échangé et après réécriture de celui-ci donner l’expression d’un facteur de forme dit “gris” dépendant des caractéristiques de la configuration géométrique et de l’émissivité des deux surfaces considérées, figure (3.6).

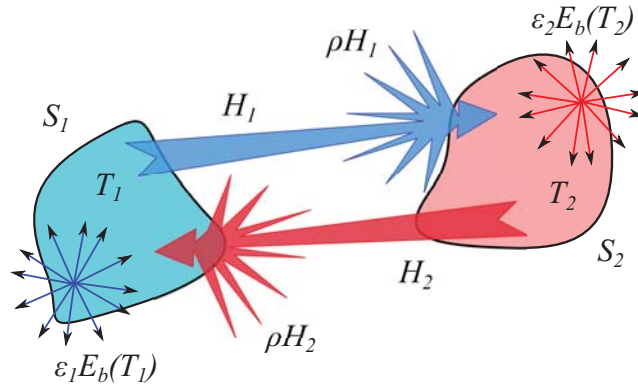


FIGURE 3.6 – Échanges radiatifs entre deux surfaces grises diffuses

Pour cette configuration, le flux net échangé va dépendre du facteur forme entre les deux surfaces S_1 et S_2 et des radiosités J_1 et J_2 . En généralisant l’équation (3.20), on obtient :

$$\dot{Q}_{12net} = J_1 S_1 F_{12} - J_2 S_2 F_{21} = S_1 F_{12} (J_1 - J_2) \quad (3.29)$$

Étant donné que seules deux surfaces sont considérées, on a vu avec l’équation (3.22) que le flux net échangé par la surface S_1 peut s’écrire :

$$\dot{Q}_{12net} = \dot{Q}_{1net} = -\dot{Q}_{21net} = -\dot{Q}_{2net} \quad (3.30)$$

En utilisant l’expression du flux net sur une surface donnée par l’équation (3.28), on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{1net} &= \frac{\epsilon_1 S_1}{(1 - \epsilon_1)} [E_b(T_1) - J_1] \\ [E_b(T_1) - J_1] &= \frac{(1 - \epsilon_1)}{\epsilon_1 S_1} \dot{Q}_{1net} \\ [E_b(T_1) - J_1] &= \frac{(1 - \epsilon_1)}{\epsilon_1 S_1} \dot{Q}_{12net} \end{aligned} \quad (3.31)$$

De même pour \dot{Q}_{2net} qui devient :

$$[E_b(T_2) - J_2] = -\frac{(1 - \epsilon_2)}{\epsilon_2 S_2} \dot{Q}_{12net} \quad (3.32)$$

En combinant les équations (3.29), (3.31) et (3.32), on peut s'affranchir des radiosités J_1 et J_2 . Après quelques calculs pour réordonner l'expression du flux net, on obtient :

$$\dot{Q}_{12net} = \frac{S_1}{\left[\frac{1}{F_{12}} + \frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} \frac{S_1}{S_2} \right]} [E_b(T_1) - E_b(T_2)] \quad (3.33)$$

On pose

$$\mathfrak{F}_{12} = \frac{1}{\left[\frac{1}{F_{12}} + \frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} \frac{S_1}{S_2} \right]} \quad (3.34)$$

où \mathfrak{F}_{12} est le facteur de forme gris tel que

$$\dot{Q}_{12net} = S_1 \mathfrak{F}_{12} [E_b(T_1) - E_b(T_2)] \quad (3.35)$$

Contrairement à F_{12} , ce facteur de forme gris n'est pas purement géométrique, puisqu'il prend en compte en plus les propriétés radiatives des surfaces.

Par contre, on remarque que dans le cas limite où les deux surfaces sont noires $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, le facteur de forme gris redevient purement géométrique et prend la valeur $\mathfrak{F}_{12} = F_{12}$.

3.2.4 Échanges entre plusieurs surfaces grises diffusantes

La généralisation du cas précédent à une enceinte constituée de N surfaces grises S_i n'est pas aussi directe que dans le cas évoqué précédemment de N surfaces noires. Pour des surfaces S_i et S_j en regard, on a toujours le flux net sur une surface qui s'exprime par $\dot{Q}_{ijnet} = S_i F_{ij} (J_i - J_j)$, mais cette fois $\dot{Q}_{ijnet} \neq \dot{Q}_{inet}$ et une autre difficulté vient du fait que le lien entre radiosité et température n'est pas direct (comme l'était la relation entre $E_b(T)$ et T pour une surface noire).

En pratique, on solutionne le problème en établissant un système de N équations linéaires fonction des radiosités J_i de chacune des surfaces.

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} J_j = B_i \quad (3.36)$$

On considérera autant de surfaces que nécessaire en découpant la géométrie de départ en surfaces élémentaires isothermes.

Le système linéaire (3.36) est mis en place en considérant deux conditions possibles pour les surfaces S_i . On écrit en fait deux types d'équations (équations (3.40) ou (3.41) telles que détaillées dans les deux paragraphes suivants) selon que la température est connue, condition de Dirichlet¹, ou que la densité de flux net est connue, condition de Neumann².

1. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, mathématicien allemand (1805-1859) - http://en.wikipedia.org/wiki/Peter_Gustav_Lejeune_Dirichlet

2. Carl Gottfried Neumann, mathématicien allemand (1832-1925) - http://fr.wikipedia.org/wiki/Carl_Neumann

La résolution de (3.36) donne ensuite l'ensemble des radiosités et on reprend alors la relation (3.28) sur chaque surface, à savoir :

$$\dot{Q}_{i\ net} = \frac{\epsilon_i S_i}{(1 - \epsilon_i)} [E_b(T_i) - J_i] \quad (3.37)$$

On en déduit le flux net si on connaissait la température de la surface ou réciproquement la température si on avait imposé le flux.

Condition de Dirichlet - Température de surface connue

La radiosité d'une surface est définie par l'équation (3.24), soit pour une surface S_i :

$$J_i = \epsilon_i E_b(T_i) + (1 - \epsilon_i) H_i \quad (3.38)$$

où H_i est l'éclairement sur la surface S_i , c'est-à-dire la densité de flux rayonnée par toutes les surfaces S_j sur S_i , soit :

$$S_i H_i = \sum_{j=1}^N S_j F_{ji} J_j \quad (3.39)$$

En utilisant la réciprocité des facteurs de forme (équation (3.9)) on peut simplifier par S_i dans l'expression précédente et la relation (3.38) devient :

$$J_i - (1 - \epsilon_i) \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j = \sigma \epsilon_i T_i^4 \quad (3.40)$$

Condition de Neumann - Flux net à la surface connu

En adoptant la même démarche que précédemment pour exprimer l'éclairement de la surface S_i par les surfaces S_j , on exprime le flux net sur la surface S_i .

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{i\ net} &= \text{flux partant de } S_i - \text{flux arrivant sur } S_i \\ &= S_i J_i - \sum_{j=1}^N S_j F_{ji} J_j \\ &= S_i \left(J_i - \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \right) \end{aligned}$$

d'où la relation à utiliser pour construire le système d'équations :

$$J_i - \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j = \dot{q}_{i\ net}'' \quad (3.41)$$

3.3 Coefficient d'échange thermique par rayonnement

Pour beaucoup d'applications d'ingénierie, il peut être utile d'estimer rapidement et simplement les échanges de chaleur par rayonnement. En particulier, d'estimer leur importance relativement aux autres modes de transferts tels que la conduction ou la convection. Le coefficient d'échange par rayonnement donne un moyen d'évaluation rapide des échanges radiatifs. Il permet en outre de linéariser l'expression du flux radiatif en fonction des températures des surfaces (expression linéarisée qui peut être utile pour l'intégration du rayonnement dans les conditions aux limites dans un problème de transferts couplés).

A la base on définit, comme en convection, un coefficient d'échange dit "radiatif" noté h_r , tel que le flux net échangé entre deux surfaces S_1 et S_2 en regard devienne une simple fonction de la différence de température ($T_1 - T_2$) sous la forme :

$$\dot{Q}_{12net} = h_r S_1 (T_1 - T_2) \quad (3.42)$$

Dans le cas de surfaces noires, en repartant de l'équation (3.20) et en développant, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{12net} &= S_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \\ &= S_1 F_{12} \sigma (T_1^2 + T_2^2) (T_1 + T_2) (T_1 - T_2) \end{aligned}$$

d'où par identification

$$h_r = S_1 F_{12} \sigma (T_1^2 + T_2^2) (T_1 + T_2) \quad (3.43)$$

Pour deux surfaces grises et diffusantes, on écrit de manière similaire :

$$h_r = S_1 \mathfrak{F}_{12} \sigma (T_1^2 + T_2^2) (T_1 + T_2) \quad (3.44)$$

Formulation approchée du coefficient h_r

L'expression donnée ci-dessus, équation (3.44), demeure compliquée à évaluer car elle fait intervenir le facteur de forme existant entre les surfaces en regard. En outre, pour de nombreuses applications, ce coefficient vise à estimer les échanges par rayonnement entre un objet et son environnement. L'objet (surface S_1) étant entouré par son environnement (S_2), on a $F_{12} \rightarrow 1$. De plus, la dimension caractéristique de l'objet est souvent très petite (S objet $\ll S$ environnement), on supposera donc $S_2 \gg S_1$. En conséquence, le facteur de forme gris, équation (3.34), se réduit à $\mathfrak{F}_{12} = \epsilon_1$.

Par ailleurs, si l'on suppose que la différence de température entre l'objet et son environnement est suffisamment faible (on fixe généralement le critère raisonnable $|T_1 - T_2| < 100^\circ\text{C}$), on définit la température moyenne $T_m = (T_1 + T_2)/2$ et on fait l'approximation suivante : $(T_1^2 + T_2^2) (T_1 + T_2) \simeq 4T_m^3$. On réécrit alors le flux net échangé à partir de la formulation exacte (3.44) sous la forme approchée suivante :

$$h_r = 4\epsilon_1 \sigma T_m^3 \quad (3.45)$$

A titre indicatif, les applications courantes à température ambiante ($T_m = 300$ K), pour un objet noir ($\epsilon_1 = 1$) conduisent à $h_r \simeq 6$ W/m².K, un ordre grandeur comparable à un coefficient de type convection naturelle, souvent négligeable par contre en situation de couplage avec de la convection forcée.

Chapitre 4

Transferts en milieu semi-transparent

4.1 Établissement de l'ETR

Lorsque le milieu entre les surfaces qui échangent du rayonnement n'est plus transparent, on doit prendre en compte son influence sur les échanges radiatifs. On parle alors de milieu "participatif", ou "semi-transparent" au sens où il peut être plus ou moins transparent (réciproquement opaque) selon la longueur d'onde considérée. Le rayonnement émis par une surface donnée sera potentiellement atténué le long de son trajet optique. Par ailleurs, le milieu lui-même, compte tenu de son niveau de température pourra émettre du rayonnement venant s'ajouter à celui des surfaces. Pour décrire la contribution du milieu aux échanges, on doit prendre en compte ces mécanismes d'atténuation et de renforcement, puis écrire un bilan sur la luminance au sein du milieu. On appelle ce bilan l'Equation du Transfert Radiatif (ou ETR).

Cette équation est établie pour une longueur d'onde et une direction de propagation du rayonnement données. Il s'agit d'un bilan énergétique qui est effectué à partir des flux entrant et sortant d'un volume de contrôle. Notre milieu, interagissant avec le rayonnement, va absorber et diffuser une partie du rayonnement incident (mécanismes d'atténuation), tandis que la diffusion peut aussi être un mécanisme de renforcement, de même que l'émission propre du milieu.

Le formalisme qui suit suppose que l'on peut négliger les instationarités éventuelles dans le milieu par rapport à la vitesse de propagation du rayonnement, que l'on considère alors "instantanée" (autrement dit on ne trouvera pas de terme en $\partial I_\nu(s, \vec{\Omega})/\partial t$ dans notre bilan). Cela ne pose pas de problème dans les applications usuelles en transferts thermiques, mais n'est pas applicable par exemple dans les applications faisant intervenir des impulsions incidentes type laser haute fréquence, comme on en trouve dans le domaine bio-médical ou parfois en caractérisation des matériaux. Par ailleurs on suppose ici une propagation en ligne droite (hors phénomène de diffusion), ce qui s'applique à des milieux d'indice de réfraction constant (une variation d'indice induirait une courbure du trajet optique conformément à la loi de Snell-Descartes). Enfin, on propose dans ce

qui suit une approche que l'on pourrait qualifier d'"historique" avec une présentation de l'ETR sous sa forme différentielle (telle qu'elle est souvent mise en place dans les cours introductifs aux milieux semi-transparents). Il existe d'autres approches qui donnent des outils équivalents et vont plus loin dans le formalisme, offrant pour certaines des possibilités d'analyse étendues (voir cours spécialisés, par exemple avec une formulation intégrale).

4.1.1 Atténuation par absorption

On considère la luminance spectrale à une position s donnée, dans une direction $\hat{\Omega}$. Une partie du rayonnement incident est absorbée par le milieu semi-transparent. La perte est proportionnelle à la luminance $I_\nu(s, \hat{\Omega})$, à la longueur du trajet optique parcouru ds et au coefficient spectral d'absorption $\kappa_{a\nu}$ qui caractérise la capacité d'absorption du milieu. La relation qui décrit la diminution de luminance est la suivante :

$$dI_\nu(s, \hat{\Omega}) = -\kappa_{a\nu}(s, \hat{\Omega})I_\nu(s, \hat{\Omega})ds \quad (4.1)$$

Le coefficient d'absorption du milieu est bien sûr une propriété radiative fondamentale du milieu. Sa variation spectrale peut être très marquée (dans le cas des milieux gazeux en particulier). Pour un milieu hétérogène, en composition ou en température, il peut aussi varier en fonction de la position, voire en fonction de la direction.

4.1.2 Atténuation par diffusion

Si le milieu est diffusant, une partie du rayonnement incident provenant de la direction de propagation $\hat{\Omega}$ est alors diffusée dans toutes les directions, comme schématisé sur la figure 4.1. L'expression de la perte de luminance associée est similaire aux pertes par absorption, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à la luminance $I_\nu(s, \hat{\Omega})$, au trajet parcouru dans le milieu ds et au coefficient spectral de diffusion $\kappa_{d\nu}$. Cette perte par diffusion peut alors s'exprimer par :

$$dI_\nu(s, \hat{\Omega}) = -\kappa_{d\nu}(s, \hat{\Omega})I_\nu(s, \hat{\Omega})ds \quad (4.2)$$

La déviation du rayonnement peut réellement être observée dans toutes les directions, y compris vers l'arrière (on parle alors de rétro-diffusion).

4.1.3 Renforcement par émission propre

Le milieu considéré émet lui-même du rayonnement. La variation de la luminance issue de cette émission est proportionnelle à l'épaisseur du milieu considéré ds , à la luminance du corps noir $I_{b\nu}(T(s))$ donnée par la loi de Planck et au coefficient spectral d'absorption (d'après l'équivalence des propriétés d'émission et absorption selon la loi de Kirchhoff). L'expression du gain par émission propre s'écrit alors :

$$dI_\nu(s, \hat{\Omega}) = \kappa_{a\nu}(s, \hat{\Omega})I_{b\nu}(T(s))ds \quad (4.3)$$

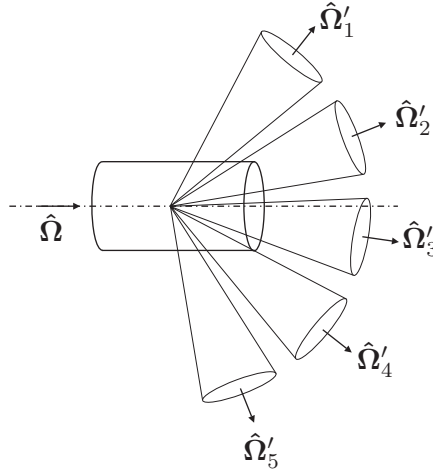


FIGURE 4.1 – Pertes par diffusion

où $T(s)$ est la température du milieu au point s .

4.1.4 Renforcement par diffusion

Si la diffusion est un mécanisme d'atténuation pour le rayonnement incident dans la direction $\hat{\Omega}$, il est aussi un mécanisme de renforcement en considérant le rayonnement se propageant initialement dans la direction $\hat{\Omega}'$ qui sera partiellement diffusé selon $\hat{\Omega}$. Pour connaître le gain de luminance correspondant il faut considérer l'ensemble des directions de l'espace sur les 4π sr et faire intervenir la probabilité pour que le rayonnement provenant de $\hat{\Omega}'$ soit diffusé selon $\hat{\Omega}$, ce que l'on appelle la fonction de phase $P_\nu(\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})$, parfois notée également $\Phi_\nu(\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})$ (notation évitée ici, Φ désignant plus loin un angle associé à la direction de diffusion).

La part diffusée dans l'angle solide $d\Omega$ centré autour de la direction $\hat{\Omega}$ est alors

$$\frac{1}{4\pi} P_\nu(\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) d\Omega \quad (4.4)$$

Le facteur 4π permet de retrouver une somme des probabilités égale à 1 si on intègre la fonction de phase sur l'ensemble des 4π sr de l'espace :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} P_\nu(\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) d\Omega' = 1 \quad (4.5)$$

Comme le gain par émission propre, le renforcement par diffusion est proportionnel à la longueur du parcours dans le milieu et au rayonnement diffusé provenant des directions considérées de l'espace. Il est défini par :

$$dI_\nu(s, \hat{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} \kappa_{d\nu}(s, \hat{\Omega}') P_\nu(\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) I_\nu(s, \hat{\Omega}') d\Omega' ds \quad (4.6)$$

4.1.5 Equation du transfert radiatif

Ayant formulé les différents mécanismes d'atténuation et de renforcement, l'équation du transfert radiatif (ETR) est construite sur un bilan d'énergie radiative effectué à partir des relations (4.1), (4.2), (4.3) et (4.6). Considérons ici que les coefficients d'absorption et de diffusion sont constants dans le milieu pour se ramener à un cas usuel simple, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dI_\nu(s, \hat{\Omega})}{ds} = & \underbrace{-\kappa_{av}I_\nu(s, \hat{\Omega})}_{\text{Pertes par absorption}} - \underbrace{\kappa_{d\nu}I_\nu(s, \hat{\Omega})}_{\text{Pertes par diffusion}} + \underbrace{\kappa_{av}I_{b\nu}(T(s))}_{\text{Émission propre}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} \kappa_{d\nu}P_\nu(\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})I_\nu(s, \hat{\Omega}')d\Omega'}_{\text{Renforcement par diffusion}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Cette équation est intégro-différentielle. Elle représente la variation de la luminance spectrale le long d'une trajectoire ds . Elle est valable en chaque point du milieu, pour la fréquence ν et pour une direction de propagation $\hat{\Omega}$ fixée.

Sa résolution nécessite l'écriture de conditions aux limites en fonction des propriétés aux frontières du milieu. Une approximation fréquemment utilisée est celle des frontières opaques à émission et réflexion diffuses. L'émissivité ϵ_ν étant connue, la luminance est la somme d'une contribution émise et de la part réfléchie de l'éclairement incident sur la surface :

$$I_\nu(s_p, \hat{\Omega}) = \epsilon_\nu I_{b\nu}(T(s_p)) + \frac{1 - \epsilon_\nu}{\pi} \int_{\hat{\Omega}' \cdot \hat{n} < 0} I_\nu(s_p, \hat{\Omega}') |\hat{\Omega}' \cdot \hat{n}| d\Omega' \quad (4.8)$$

où s_p est le point de la surface où la condition est écrite et $T(s_p)$ sa température.

Le cas de frontières noires suppose simplement $\epsilon_\nu = 1$ et donc $I_\nu(s_p, \hat{\Omega}) = I_{b\nu}(T(s_p))$.

4.1.6 Flux et divergence de flux radiatif

La densité de flux radiatif spectral est obtenue par intégration de la luminance :

$$\dot{\mathbf{q}}''_\nu(s) = \int_{\Omega=4\pi} I_\nu(s, \hat{\Omega}) \hat{\Omega} d\Omega \quad (4.9)$$

La densité de flux total est donc :

$$\dot{\mathbf{q}}''(s) = \int_\nu \int_{\Omega=4\pi} I_\nu(s, \hat{\Omega}) \hat{\Omega} d\Omega d\nu \quad (4.10)$$

On évalue également la divergence du flux radiatif, $\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}''$, dont l'expression dérivée de l'ETR donne (après calculs que l'on retrouvera détaillés dans [7] par exemple) :

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}'' = \nabla \cdot \int_\nu \int_{\Omega=4\pi} I_\nu(s, \hat{\Omega}) \hat{\Omega} d\Omega d\nu \quad (4.11)$$

$$= \int_\nu \kappa_{av} \left[4\pi I_{b\nu}(T) - \int_{\Omega=4\pi} I_\nu(s, \hat{\Omega}) d\Omega \right] d\nu \quad (4.12)$$

La divergence de flux correspond au terme source radiatif introduit dans l'équation de l'énergie dans les problèmes de transferts couplés.

4.2 Solution pour des configurations simples

4.2.1 Milieu froid

L'approximation du milieu froid conduit à négliger le terme d'émission propre (par exemple parce que la température du milieu est faible et que l'énergie induite par émission propre est négligeable devant l'énergie incidente sur le milieu, ou encore parce que l'on modélise un dispositif expérimental qui s'affranchit de l'émission propre par une technique de modulation du signal incident). Pour un milieu non diffusant, supposé homogène (coefficient d'absorption constant), l'ETR se simplifie alors de telle façon que :

$$\frac{dI_\nu(s, \hat{\Omega})}{ds} + \kappa_{a\nu} I_\nu(s, \hat{\Omega}) = 0 \quad (4.13)$$

Associée à une condition en $s = 0$: $I_\nu(0, \hat{\Omega}) = I_{\nu 0}$, cette équation différentielle ordinaire a pour solution :

$$I_\nu(s, \hat{\Omega}) = I_{\nu 0} e^{-\kappa_{a\nu} s} \quad (4.14)$$

Le rapport de l'intensité en s sur sa valeur en 0 donne un résultat bien connu de transmittance, décrite par une atténuation exponentielle du rayonnement dans le milieu (loi de Beer-Lambert) :

$$\tau_\nu = \frac{I_\nu(s, \hat{\Omega})}{I_{\nu 0}} = e^{-\kappa_{a\nu} s} \quad (4.15)$$

Le produit $\kappa_{a\nu} s$ est appelé l'épaisseur optique du milieu.

4.2.2 Milieu homogène isotherme non diffusant

Dans le cas d'un milieu absorbant-émisif, mais non diffusant, homogène et isotherme à température T , l'ETR s'écrit :

$$\frac{dI_\nu(s, \hat{\Omega})}{ds} + \kappa_{a\nu} I_\nu(s, \hat{\Omega}) = \kappa_{a\nu} I_{b\nu}(T) \quad (4.16)$$

En conservant la même condition en $s = 0$: $I_\nu(0, \hat{\Omega}) = I_{\nu 0}$, la solution s'écrit :

$$I_\nu(s, \hat{\Omega}) = I_{\nu 0} e^{-\kappa_{a\nu} s} + (1 - e^{-\kappa_{a\nu} s}) I_{b\nu}(T) \quad (4.17)$$

Si le flux incident est négligeable devant la part d'émission propre, cette solution devient plus simplement $I_\nu(s, \hat{\Omega}) = (1 - e^{-\kappa_{a\nu} s}) I_{b\nu}(T)$. Elle est à l'origine du concept d'émissivité équivalente d'une couche chaude isotherme d'épaisseur L telle que $\epsilon_\nu = 1 - e^{-\kappa_{a\nu} L}$.

4.2.3 Pour aller plus loin... principales méthodes de résolution

Les exemples de solutions formelles proposées au paragraphe précédent sont très simples. On peut aller plus loin avec des formulations intégrales de l'ETR (en particulier proposer des solutions intégrales y compris pour les milieux hétérogènes ou anisothermes). Toutefois quand la complexité du problème augmente ou si la géométrie elle-même est complexe, on aura recours à des méthodes de résolution numérique. On trouvera des détails sur ces méthodes dans les ouvrages cités en référence à ce polycopié. Elles seront également décrites dans les cours spécifiques de l'école thématique.

Les méthodes sont simplement classées par grandes familles ci dessous :

- Méthodes approchées : approximation de Rosseland (concept de méthode diffusive avec définition d'une conductivité radiative équivalente, très facile à implémenter puisqu'on ne résoud pas vraiment d'équation en plus, on introduit seulement une conductivité thermique modifiée, cela suppose que le milieu est optiquement épais, le résultat est approximatif, en particulier près des frontières) ; approximation P1 (également appelée approximation de la diffusion, issue des méthodes de décomposition en harmoniques sphériques, tronquées ici à l'ordre 1, le problème est réduit à la résolution de deux équations pour la divergence de flux et la luminance intégrée dans l'espace, rapide mais approximatif), il existe des modèles dérivés plus élaborés avec des approximations aux ordres supérieurs notamment (méthodes P_N).
- Méthodes basées sur une discrétisation angulaire de l'espace : Méthode deux flux (la luminance est supposée constante dans chaque hémisphère, la solution est quasi analytique, les résultats sont approximatifs en particulier si le problème présente une anisotropie marquée), Méthode des Ordonnées Discrètes et Méthode des Volumes Finis (découpage de l'espace selon des quadratures fines impliquant un grand nombre de directions et permettant une description fine, attention aux problèmes potentiels de diffusion numérique et aux effets de rayons qui peuvent dégrader la solution... mais cette famille de méthodes est très couramment utilisée avec une précision jugée plutôt satisfaisante par une majorité d'utilisateurs).
- Méthodes statistiques : selon la situation on parlera de méthodes de lancers de rayons (milieu transparent) ou de méthodes de Monte Carlo (on suit alors des paquets d'énergie le long de leurs trajets optiques dans le milieu et on réalise une analyse statistique pour évaluer les flux échangés et la divergence de flux, ce sont des méthodes aux capacités quasi illimitées en dehors du coût numérique, désormais considérées comme la référence, de nombreux progrès sur les 20 dernières années ont largement étendu le champ d'application de ces méthodes).

4.3 Introduction à la méthode de Monte Carlo

Comme évoqué plus haut, l'étude du transfert radiatif dans un milieu absorbant, diffusant et émissif, en particulier en configuration 2D ou 3D, montre que le problème n'admet pas de solution analytique directe sans introduire d'approximation. La méthode, ou plutôt les méthodes, de Monte Carlo donnent accès à une solution numérique dont la validité peut vraiment être supérieure à celle des autres méthodes si le résultat repose

sur un grand nombre de statistiques.

On présente ici une introduction à la méthode, sous un formalisme simple dit de méthode de Monte Carlo analogue (il existe des méthodes dérivées de cette première approche dites "méthodes de Monte Carlo réciproques", ou d'autres reposant sur une formulation intégrale de la luminance, qui offrent des vitesses de convergence plus rapides, ou encore la capacité d'évaluer non seulement les flux échangés mais aussi les incertitudes associées à ces grandeurs (voir les cours spécifiques sur ce thème).

Le principe de base est de suivre un grand nombre de paquets d'énergie (on parle de quanta) le long de leurs trajectoires dans le milieu, qu'ils soient issus des frontières ou du milieu lui-même (phénomène d'émission propre) et de leur faire subir un certain nombre d'événements d'absorption ou de diffusion selon des probabilités définies en cohérence avec les propriétés du milieu. Le suivi s'arrête lorsque le quantum considéré sort du milieu étudié ou lorsque le quantum a été totalement absorbé (du moins que la part d'énergie restante se situe en dessous d'un seuil fixé pour le calcul). Une analyse statistique de l'évolution des quanta en fonction de l'énergie totale suivie lors du calcul permet d'évaluer les échanges. Il y a des précautions à prendre dans la génération des quanta, pour que la définition de leur direction, de l'énergie qu'ils transportent et des événements qu'il subissent respecte la physique du rayonnement et donne des résultats statistiques corrects (attention en particulier à la génération de nombres aléatoires nécessaire au suivi, qui ne doit pas utiliser des outils produisant des séries répétitives de nombres ; attention également à l'analyse de la convergence). On donne dans ce qui suit quelques éléments techniques pour la génération et le suivi des quanta.

Cette présentation basique s'inspire notamment des références suivantes [9, 7, 10, 11], que l'on pourra consulter pour plus de détails.

4.3.1 Envoi de quanta

Envoi de quanta depuis les parois

La frontière du domaine d'étude est découpée en surfaces élémentaires afin de considérer l'émission de quanta depuis les parois. Chaque élément de surface peut être considéré comme gris ou non gris, mais il est supposé isotherme. Il est ensuite maillé en cellules de taille Δx , Δy et Δz .

La position d'émission du quantum est par exemple tirée selon une loi uniforme de surface. Pour une surface dont la normale est orientée selon l'axe Z, on a :

$$x_{\text{émission}} = x_{\text{cellule}} + (R_x - 0,5) \Delta x \quad (4.18)$$

$$y_{\text{émission}} = y_{\text{cellule}} + (R_y - 0,5) \Delta y \quad (4.19)$$

où R est une variable aléatoire suivant une loi uniforme dans $[0; 1]$.

Pour des parois à émission isotrope (lambertienne), la direction d'émission du quantum respecte une densité de probabilité imposée par la loi de Lambert et l'expression de l'angle solide. La direction d'émission est définie par l'angle polaire, θ (sur la figure 4.2, angle entre la direction d'émission et la normale à la surface) et l'angle azimutal, φ .

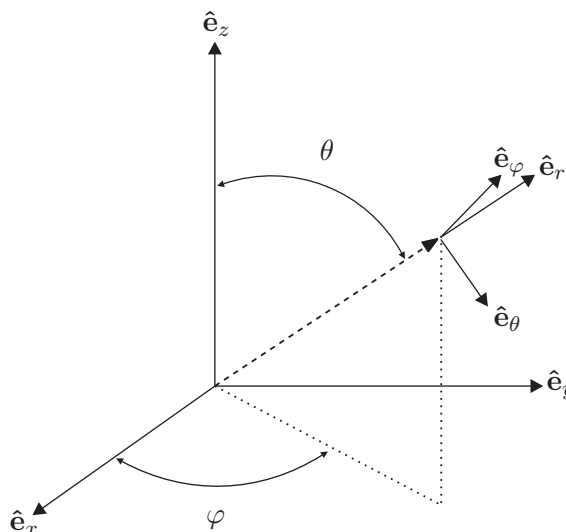


FIGURE 4.2 – Référence pour le système de coordonnées sphériques

La direction azimutale ne pose pas de difficulté dans la mesure où chaque direction selon un angle de 0 à 2π est équiprobable. La densité de probabilité $p(\varphi)$ liée à l'angle azimutal φ est donc uniforme sur $[0; 2\pi]$ pour tout angle polaire θ donné, ce qui conduit au choix de l'angle φ par :

$$\varphi = 2\pi R_\varphi \quad (4.20)$$

R_φ étant un nombre choisi de façon aléatoire dans $[0; 1]$.

Pour la densité de probabilité $p(\theta)$ liée à l'angle polaire, on revient à la définition de l'émittance, en particulier pour une surface lambertienne (équation (2.13)). La probabilité pour que le flux émis par la surface soit dans un angle compris entre 0 et θ est donnée par :

$$F(\theta) = \frac{\int_0^\theta I \cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\int_0^{\pi/2} I \cos \theta' \sin \theta' d\theta'} = \int_0^\theta 2 \cos \theta' \sin \theta' d\theta' \quad (4.21)$$

Dit autrement, la densité de probabilité $p(\theta)$ telle que la direction d'émission soit orientée selon un angle polaire compris entre 0 et θ est :

$$p(\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta \quad (4.22)$$

Pour déterminer aléatoirement θ on repart de l'expression de $F(\theta)$ qui n'est autre que la fonction de répartition de θ , puis on considère $F(\theta)$ comme une variable aléatoire, notée R_θ , uniforme sur $[0, 1]$, ce qui conduit à :

$$R_\theta = \int_0^\theta 2 \cos \theta' \sin \theta' d\theta' = \sin^2 \theta \quad (4.23)$$

ou encore :

$$\cos^2 \theta = R'_\theta = 1 - R_\theta \quad (4.24)$$

Ces relations sont valables si nous considérons que les quanta sont émis de façon isotrope sur un hémisphère complet. Si les quanta sont émis dans un angle réduit autour d'une incidence donnée, les directions envisageables sont dans un cône d'angle d'ouverture θ_{\max} . Le choix de l'angle polaire est alors défini grâce à la relation suivante :

$$R_\theta = \frac{1}{\sin^2 \theta_{\max}} \int_0^\theta 2 \cos \theta' \sin \theta' d\theta' = \frac{1}{\sin^2 \theta_{\max}} \sin^2 \theta \quad (4.25)$$

et donc :

$$\sin^2 \theta = R_\theta \sin^2 \theta_{\max} \quad (4.26)$$

$$\cos^2 \theta = 1 - R_\theta \sin^2 \theta_{\max} \quad (4.27)$$

Le quantum transporte une partie du flux émis par la paroi. Pour définir cette quantité, il faut revenir à la définition du flux radiatif pariétal. Si l'élément de surface \mathcal{S} est orienté selon la normale $\hat{\mathbf{e}}_z$ et si son émissivité est donnée par ϵ , le flux radiatif émis par \mathcal{S} s'écrit pour un milieu gris : $Q = \mathcal{S}\epsilon\sigma T^4$

De manière analogue, si on considère que les quanta sont émis dans un angle limité, le flux radiatif total s'écrit : $Q = \mathcal{S}\epsilon\sigma T^4 \sin^2 \varphi_{\max}$

Dans le cadre d'un milieu non gris, on aurait de même $Q_\nu = \mathcal{S}\epsilon_\nu\pi I_{b\nu}(T)$ ou $Q_\nu = \mathcal{S}\epsilon_\nu\pi I_{b\nu}(T) \sin^2 \varphi_{\max}$

La puissance transportée par un quantum est $\mathcal{Q} = \frac{Q}{N_{\text{quanta}}}$ ou $\mathcal{Q}_\nu = \frac{Q_\nu}{N_{\text{quanta}}}$

où N_{quantum} correspond au nombre de quanta lancés à partir de l'élément de surface correspondant.

Émission de quanta depuis le milieu

Le milieu, divisé en éléments de volume, peut également émettre du rayonnement puisqu'il est à une température différente de 0 K. La position d'émission du quantum est tirée de façon équiprobable au sein de l'élément de volume :

$$x_{\text{émission}} = x_{\text{cellule}} + (R_x - 0,5) \Delta x \quad (4.28)$$

$$y_{\text{émission}} = y_{\text{cellule}} + (R_y - 0,5) \Delta y \quad (4.29)$$

$$z_{\text{émission}} = z_{\text{cellule}} + (R_z - 0,5) \Delta z \quad (4.30)$$

La direction d'émission du quantum respecte une densité de probabilité répondant à l'expression de l'angle solide $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. Chaque direction étant équiprobable, la densité de probabilité $p(\varphi)$ liée à l'angle azimutal φ est toujours uniforme sur $[0; 2\pi]$ et donc :

$$\varphi = 2\pi R_\varphi \quad (4.31)$$

La probabilité pour que l'angle polaire d'émission soit compris entre 0 et θ devient :

$$F(\theta) = \frac{\int_0^\theta \sin \theta' d\theta'}{\int_0^\pi \sin \theta' d\theta'} = \frac{1}{2} \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' \quad (4.32)$$

Autrement dit la densité de probabilité correspondante est :

$$p(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta \quad (4.33)$$

Pour déterminer aléatoirement θ on considère la fonction de répartition comme une variable aléatoire, notée R_θ , uniforme sur $[0, 1]$, ce qui conduit à :

$$R_\theta = \int_0^\theta \frac{1}{2} \sin \theta' d\theta' = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \quad (4.34)$$

et donc :

$$\cos \theta = 1 - 2R_\theta \quad (4.35)$$

La puissance qui est émise par un élément de volume \mathcal{V} , dans le cas d'un milieu gris est $\dot{Q} = 4\kappa_a \mathcal{V} \sigma T^4$

Pour un milieu non gris, la puissance spectrale émise par ce même élément de volume est : $\dot{Q}_\nu = 4\pi \kappa_{a\nu} \mathcal{V} I_{b\nu}(T)$

Chaque quantum transporte une partie de cette puissance.

4.3.2 Évolution des quanta dans le milieu

On suit maintenant le quantum dans le milieu en évaluant : (1) son libre parcours moyen dans une direction donnée (la distance qu'il parcourt avant interaction avec la matière), (2) l'événement qu'il subit alors (absorption ou diffusion, on parle parfois d'événement de "collision"). La famille des méthodes de Monte Carlo analogue regroupe plusieurs variantes qui évaluent différemment la distance d'interaction et le type d'événement subi. On reprend ici quatre modèles fréquemment rencontrés dans la littérature [7, 11].

Méthode MMC 1.1

Dans cette méthode, la distance d'interaction est estimée à partir du coefficient d'extinction, $\kappa_e = \kappa_a + \kappa_d$ (somme des phénomènes d'absorption et diffusion traduisant la capacité d'atténuation totale du milieu, parfois noté κ simplement, ou κ_{ext}). On rappelle que l'atténuation de la luminance le long d'un trajet de longueur ds (section 4.1) est de la forme (notation simplifiée, sous l'hypothèse d'un milieu homogène) :

$$dI = -\kappa_e I ds \quad (4.36)$$

Ce qui nous conduit, pour une valeur initiale de la luminance I_0 , à une atténuation exponentielle de la luminance le long du trajet optique sous la forme suivante :

$$I = I_0 e^{-\kappa_e s} \quad (4.37)$$

L'atténuation le long de ds est donc égale à :

$$dI = -\kappa_e I_0 e^{-\kappa_e s} ds \quad (4.38)$$

et la probabilité qu'un quantum d'énergie initiale proportionnelle à I_0 soit absorbé ou diffusé après avoir parcouru une distance S_{κ_e} est alors :

$$P(S_{\kappa_e}) = \int_0^{S_{\kappa_e}} \kappa_e e^{-\kappa_e s} ds \quad (4.39)$$

Dit autrement, la densité de probabilité correspondante est :

$$p(s) = \kappa_e e^{-\kappa_e s} \quad (4.40)$$

En supposant que le milieu a des propriétés radiatives homogènes, l'intégrale (4.39) a une solution simple : $P(S_{\kappa_e}) = 1 - e^{-\kappa_e S_{\kappa_e}}$. On définit alors ce qu'on appelle la distance d'interaction S_{κ_e} , correspondant à la distance parcourue par le quantum avant de subir une interaction avec le milieu, telle que :

$$1 - e^{-\kappa_e S_{\kappa_e}} = R_{\kappa_e} = 1 - R'_{\kappa_e} \quad (4.41)$$

où R_{κ_e} et R'_{κ_e} sont des variables à distribution uniforme dans $[0;1]$.

En pratique, on obtient finalement S_{κ_e} à partir de :

$$S_{\kappa_e} = -\frac{1}{\kappa_e} \ln R'_{\kappa_e} \quad (4.42)$$

Après avoir parcouru S_{κ_e} , le quantum est soit diffusé dans une autre direction de propagation, soit entièrement absorbé par le milieu. Pour fixer le choix de l'événement subi par le quantum, un nombre aléatoire R_ω est comparé à l'albédo ω (qui représente la part du phénomène de diffusion dans l'extinction totale : $\omega = \kappa_d/\kappa_e$) :

$$\text{- Si } R_\omega < \omega \text{ , alors diffusion du quantum dans une autre direction,} \quad (4.43)$$

$$\text{- Si } R_\omega > \omega \text{ , alors absorption entière du quantum par le milieu.} \quad (4.44)$$

L'absorption du quantum est comptabilisée là où il se trouve après avoir parcouru la distance d'interaction.

Méthode MMC 1.2

Cette deuxième méthode reprend la même distance d'interaction, S_{κ_e} mais l'événement subi par le quantum est modélisé différemment. Ici, une partie de la puissance transportée $(1 - \omega) \dot{Q}$ est absorbée par le milieu et la partie complémentaire $\omega \dot{Q}$ est diffusée selon une nouvelle direction.

Méthode MMC 2

L'inconvénient des techniques précédentes est que la part d'énergie absorbée ne dépend que des propriétés radiatives du point où le quantum s'est arrêté. La modélisation présentée ici, propose d'estimer la distance d'interaction, S_σ , par rapport au coefficient de diffusion du milieu. Cette distance est définie pour un milieu homogène par :

$$S_{\kappa_d} = -\frac{1}{\kappa_d} \ln R_{\kappa_d} \quad (4.45)$$

et pour un milieu hétérogène par :

$$R_{\kappa_d} = \exp\left(-\int_0^{S_{\kappa_d}} \kappa_d ds\right) \quad (4.46)$$

La part de flux absorbée est estimée sur l'ensemble de la distance d'interaction S_{κ_d} :

$$P_{\text{absorbée}} = 1 - \exp\left(-\int_0^{S_{\kappa_d}} \kappa_a ds\right) \quad (4.47)$$

Et la part de flux diffusée est :

$$P_{\text{diffusée}} = \exp\left(-\int_0^{S_{\kappa_d}} \kappa_a ds\right) \quad (4.48)$$

Le flux, $P_{\text{absorbée}} \dot{Q}$ est supposé absorbé par le milieu à l'endroit où se situe le quantum, et la partie complémentaire, $P_{\text{diffusée}} \dot{Q}$ repart, diffusée dans une autre direction.

Méthode MMC 3

La dernière approche classique considère deux distances d'interaction : l'une basée sur la diffusion S_{κ_d} et l'autre sur l'absorption S_{κ_a} définie pour un milieu homogène par :

$$S_{\kappa_a} = -\frac{1}{\kappa_a} \ln R_{\kappa_a} \quad (4.49)$$

et pour un milieu hétérogène par :

$$R_{\kappa_a} = \exp\left(-\int_0^{S_{\kappa_a}} \kappa_a ds\right) \quad (4.50)$$

S_{κ_a} représente le trajet que peut parcourir le quantum sans être absorbé. Pour cette modélisation, le quantum peut poursuivre son évolution dans le milieu avec une multitude de diffusions (diffusion du quantum à la fin de chaque S_{κ_d}) aussi longtemps que la distance totale parcourue est plus petite que la distance d'interaction liée au coefficient

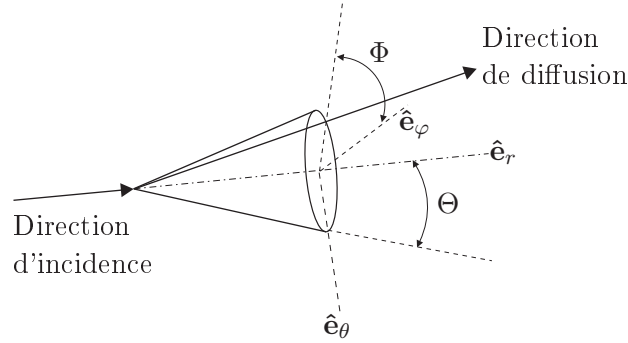


FIGURE 4.3 – Référence pour les différents angles de diffusion

d'absorption S_{κ_a} . Une fois cette distance dépassée, le quantum est entièrement absorbé par le milieu.

Note : Ces méthodes ont bien sûr été comparées entre elles en termes de précision et rapidité. On trouvera dans la bibliographie des éléments de choix pour définir le meilleur compromis facilité d'implémentation / précision / temps de calcul. Elles ont également fait l'objet de perfectionnements qui vont au-delà de l'introduction présentée ici.

4.3.3 Choix de la direction après un événement de diffusion

Le cas de diffusion le plus simple à traiter est celui de la diffusion isotrope, pour lequel la nouvelle direction choisie est obtenue de façon aléatoire (on reprend alors le principe décrit dans la section 4.3.1 associée à l'émission d'un quantum par le milieu). Par contre, dans le cas d'un milieu à diffusion anisotrope, le choix de cette nouvelle direction doit être lié à la fonction de phase.

Deux angles sont nécessaires pour définir la nouvelle direction de propagation. Appelons Θ l'angle de diffusion (angle formé entre la direction incidence et la direction diffusée) et Φ l'angle formé par la normale à la direction d'incidence et la direction de diffusion. Ces angles sont repérés sur la figure 4.3. Ils sont obtenus de la manière suivante :

$$R_{\Theta} = \frac{1}{2} \int_0^{\Theta} P(\Theta) \sin \Theta d\Theta \quad (4.51)$$

$$\Phi = 2\pi R_{\Phi} \quad (4.52)$$

La nouvelle direction de diffusion est repérée dans un repère de coordonnées sphériques (Cf. figure 4.3) par :

$$\hat{\Omega}_{\text{diffusée}} = \cos \Theta \hat{e}_r - \sin \Phi \sin \Theta \hat{e}_{\theta} + \cos \Phi \sin \Theta \hat{e}_{\varphi} \quad (4.53)$$

Rappelons que d'après les figures 4.2 et 4.3 :

$$\hat{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z \quad (4.54)$$

$$\hat{e}_{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{e}_y - \sin \theta \hat{e}_z \quad (4.55)$$

$$\hat{e}_{\varphi} = -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y \quad (4.56)$$

Alors les coefficients directeurs de la nouvelle direction de diffusion sont :

$$\begin{aligned}
 \hat{\Omega}_{\text{diffusée}} &= A\hat{\mathbf{e}}_x + B\hat{\mathbf{e}}_y + C\hat{\mathbf{e}}_z & (4.57) \\
 A &= \cos \Theta \sin \theta \cos \varphi - \sin \Phi \sin \Theta \cos \theta \cos \varphi - \cos \Phi \sin \Theta \sin \varphi \\
 B &= \cos \Theta \sin \theta \sin \varphi - \sin \Phi \sin \Theta \cos \theta \sin \varphi + \cos \Phi \sin \Theta \cos \varphi \\
 C &= \cos \Theta \cos \theta + \sin \Phi \sin \Theta \sin \theta
 \end{aligned}$$

4.3.4 Flux et divergence de flux radiatif

La densité de flux spectral incident sur une paroi de normale extérieure $\hat{\mathbf{n}}$ s'obtient en comptabilisant l'ensemble des N_S quanta atteignant cette frontière avec la puissance individuelle $\dot{Q}_{i\nu}$:

$$\dot{\mathbf{q}}''_{\nu} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sum_{i=1}^{N_S} \frac{\dot{Q}_{i\nu}}{\mathcal{S}_{\text{frontière}}} \quad (4.58)$$

Une sommation sur l'ensemble du spectre de fréquences donnera le flux incident total et la différence avec la part émise ($\epsilon\sigma T^4$) donnera le flux net reçu.

La divergence de flux s'obtiendra en comptabilisant sur chaque volume de contrôle la différence entre puissance émise et puissance absorbée (fonction de la méthode de suivi utilisée en section (4.3.2)).

Chapitre 5

Échange de chaleur par rayonnement - TD

5.1 Angle solide du système terre - soleil

Déterminer l'angle solide sous lequel est vu le soleil depuis la terre. Données : Distance moyenne terre - soleil $d_{TS}=1.496 \cdot 10^{11}$ m ; rayon du soleil $R_S=6.96 \cdot 10^8$ m.

Il existe plusieurs niveaux de résolution mais le plus simple (et sans perte de précision dans le cas présent) est de considérer le soleil comme un disque de faible rayon par rapport à la distance terre-soleil, dont les rayons arrivent selon un angle quasiment nul. Cela conduit à l'angle solide $\Omega = \pi R_S^2 / d_{TS}^2$.

5.2 Pyrométrie - Température de luminance

On mesure la température du filament tungstène d'une lampe au moyen d'un pyromètre à rayonnement total qui indique 1600 K. Sachant que l'émissivité du tungstène à ce niveau de température est $\epsilon=0.279$, calculer la vraie température du tungstène étudié.

On utilise maintenant sur ce même filament tungstène un pyromètre monochromatique sensible à la longueur d'onde $\lambda=0.66 \mu\text{m}$ (correspondant au rouge). L'appareil lit $T_\lambda=2026$ K. Sachant que l'émissivité spectrale du tungstène à $0.665 \mu\text{m}$ vaut $\epsilon_\lambda=0.431$, calculer sa vraie température.

La base est de considérer l'égalité entre ce que le pyromètre "croit" observer (une surface noire à la température $T_L = 1600$ K) et ce qu'il voit réellement (une surface réelle à la température T_R). On a alors $I_b(T_L) = \epsilon I_b(T_R)$, çàd $\frac{\sigma T_L^4}{\pi} = \epsilon \frac{\sigma T_R^4}{\pi}$.

Dans la deuxième partie, on écrit l'égalité équivalente en luminance spectrale en introduisant la loi de Planck : $I_{b\lambda}(T_L) = \epsilon_\lambda I_{b\lambda}(T_R)$.

L'application numérique donne 2200 K pour la température réelle dans les deux cas.

5.3 Émittance et loi de Wien

À quelles longueurs d'onde le soleil et la terre ont-ils une émittance maximale ?

Données : $T_{\text{terre}}=290$ K et $T_{\text{soleil}}=5762$ K.

Par application de la loi de Wien $\lambda_{\text{max}}T = 2898 \mu\text{K}$ on obtient approximativement 10μ et $0,5 \mu$ respectivement.

5.4 Étude d'un corps noir

Soit un corps noir dont la température est 1500 K. Ce corps noir est placé dans le vide. Déterminer :

1. La luminance maximale,
2. La valeur de l'émittance de ce corps noir dans tout le domaine spectral,
3. La valeur de l'émittance entre $2 \mu\text{m}$ et $5 \mu\text{m}$.

Réponses : $1,9 \mu$; 287 kW/m^2 ; 160 kW/m^2

5.5 Énergie solaire reçue par la terre

En supposant que le soleil rayonne comme un corps noir à 5800 K, calculer l'éclairement solaire à la surface de la terre. On suppose que le soleil est au zénith de l'endroit considéré sur la terre. Par ailleurs, on admet que la transmittivité de l'atmosphère terrestre est de $\tau = 75\%$.

Données : $R_{\text{soleil}}=6.96 \cdot 10^8$ m ; $d_{\text{soleil-terre}}=1.496 \cdot 10^{11}$ m ; $\sigma = 5,6698 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ (constante de Stefan-Boltzmann).

Réponse : 1040 W/m^2

5.6 Capteur solaire, effet de serre [1]

On considère un capteur solaire plan (figure 5.1) destiné à chauffer de l'eau. Il est composé d'une plaque "noire" ($\epsilon=1$) et d'une vitre en verre ($S=1 \text{ m}^2$) dont les propriétés optiques en fonction de la longueur d'onde sont résumées dans la table suivante (table 5.1) :

On suppose que le capteur solaire est parfaitement isolé, que la circulation d'eau est interrompue et que le régime permanent est atteint. L'éclairement total de la vitre vaut $H=1000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$; la température de l'air ambiant est : $T_{\infty}=300$ K. En écrivant les bilans énergétiques de la plaque noire et de la vitre, déterminer :

1. La température T_2 de la plaque noire,

Bande spectrale	α	ρ	τ	Remarques
$0,5 < \lambda < 2,5 \mu\text{m}$	$\alpha_1 \approx 0$	$\rho_1 = 0,05$	$\tau_1 = 0,95$	Rayonnement C.N. à haute température
$2,5 < \lambda < 10 \mu\text{m}$	$\alpha_2 = 0,65$	$\rho_2 = 0,30$	$\tau_2 = 0,05$	Rayonnement C.N. à basse température
$\lambda > 10 \mu\text{m}$	$\alpha_3 \approx 1$	$\rho_3 \approx 0$	$\tau_3 \approx 0$	Rayonnement C.N. à très basse température

TABLE 5.1 – Propriété optique du verre

2. La température T_1 de la vitre (on suppose que son émissivité est : $\epsilon=0,88$).

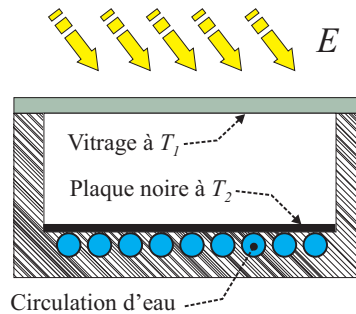


FIGURE 5.1 – Capteur solaire

Cet exercice est un des grands classiques pour réfléchir à la nature spectrale du rayonnement et à ses conséquences dans les échanges, on en trouvera une correction dans [1].

5.7 Flux net entre deux plaques - abaques

Soit deux plaques planes parallèles noires de dimensions $0,5 \text{ m} \times 1 \text{ m}$. Elles sont espacées de $0,5 \text{ m}$. Une plaque est à 1000°C l'autre à 500°C . Déterminer le flux net échangé par les deux plaques.

Réponse : $18,3 \text{ kW/m}^2$.

5.8 Étude des pertes radiatives d'un four [1]

Un four parallélépipédique (figure 5.2) a les dimensions suivantes : $4 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$. L'entrée du four a une surface S_0 ($3 \text{ m} \times 1 \text{ m}$) et est à l'air libre à la température de 300 K . La voûte du four est à 1200 K , la sole à 800 K et les autres parois sont à 1000 K .

1. On supposera que toutes les parois sont noires. Déterminer, en utilisant les abaques sur les facteurs de forme, les pertes radiatives à l'entrée du four.
2. Reprendre ce problème en supposant des parois grises et diffuses pour la voûte ($\epsilon_v = 0.9$) et la sole ($\epsilon_s = 0.8$).

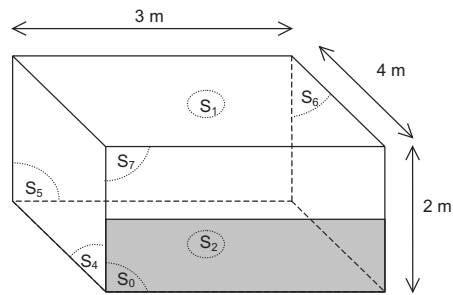


FIGURE 5.2 – Four

Cet exercice est un des grands classiques pour travailler la détermination des facteurs de formes et évaluer les échanges entre surface noires, on en trouvera une correction dans [1]. Flux net perdu par la porte : 170 kW/m^2 .

Abaques

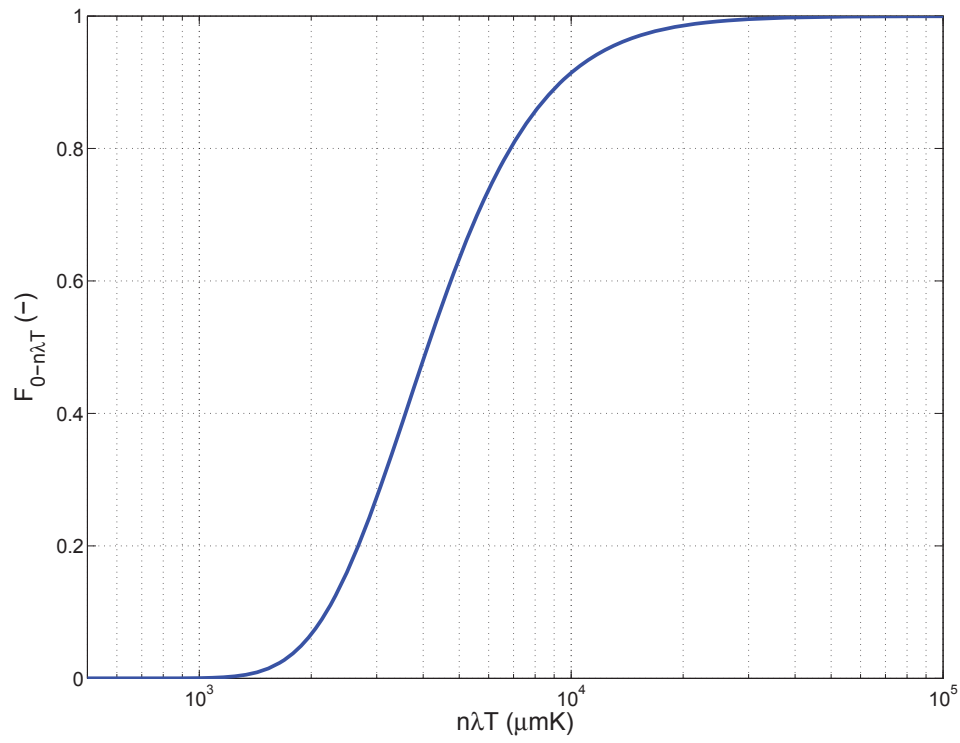
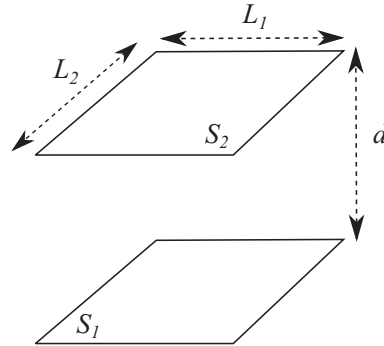


FIGURE 5.3 – Fraction de l'émittance du corps noir [6]



$$X = \frac{L_1}{d} \quad Y = \frac{L_2}{d}$$

$$F_{12} = \frac{2}{\pi XY} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2} \right] + X\sqrt{1+Y^2} \tan^{-1} \left(\frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + Y\sqrt{1+X^2} \tan^{-1} \left(\frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} \right) - X \tan^{-1} X - Y \tan^{-1} Y \right\}$$

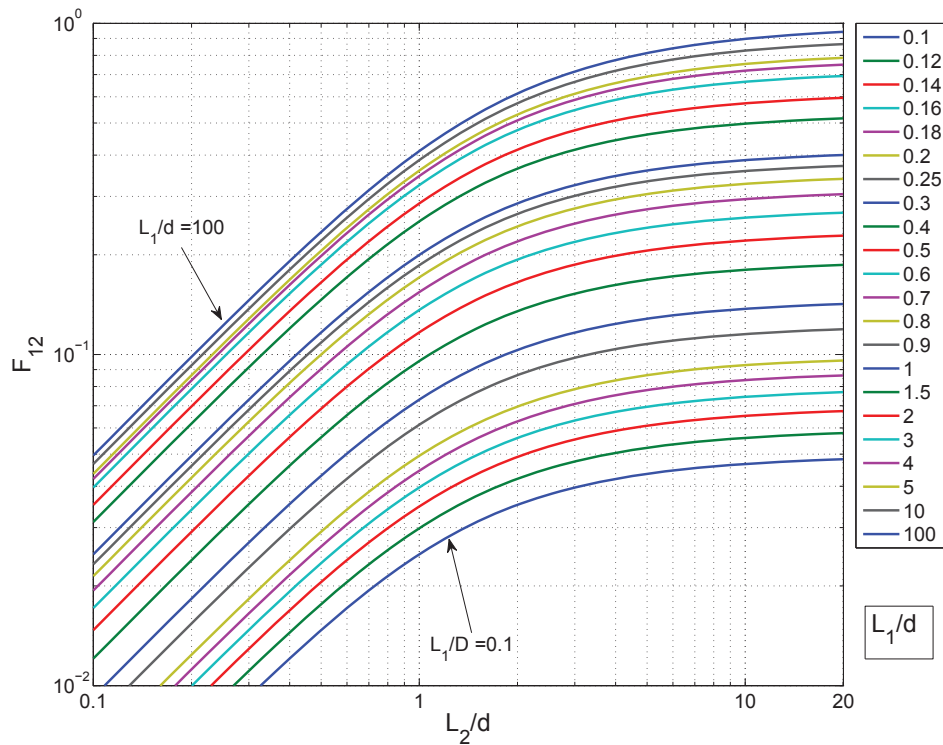
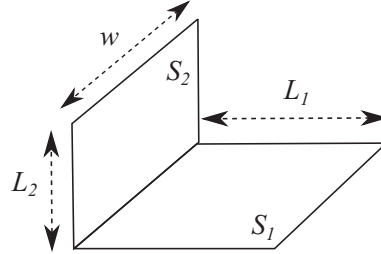


FIGURE 5.4 – Facteur de forme de deux plans parallèles [8] ; Dimensions $L_1 \times L_2$ distants de d



$$W = \frac{L_1}{w} \quad H = \frac{L_2}{w}$$

$$F_{12} = \frac{1}{\pi W} \left(W \tan^{-1} \frac{1}{W} + H \tan^{-1} \frac{1}{H} - \sqrt{H^2 + W^2} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{H^2 + W^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{4} \ln \left\{ \frac{(1+W^2)(1+H^2)}{1+W^2+H^2} \left[\frac{W^2(1+W^2+H^2)}{(1+W^2)(W^2+H^2)} \right] W^2 \left[\frac{H^2(1+W^2+H^2)}{(1+H^2)(W^2+H^2)} \right] H^2 \right\} \right)$$

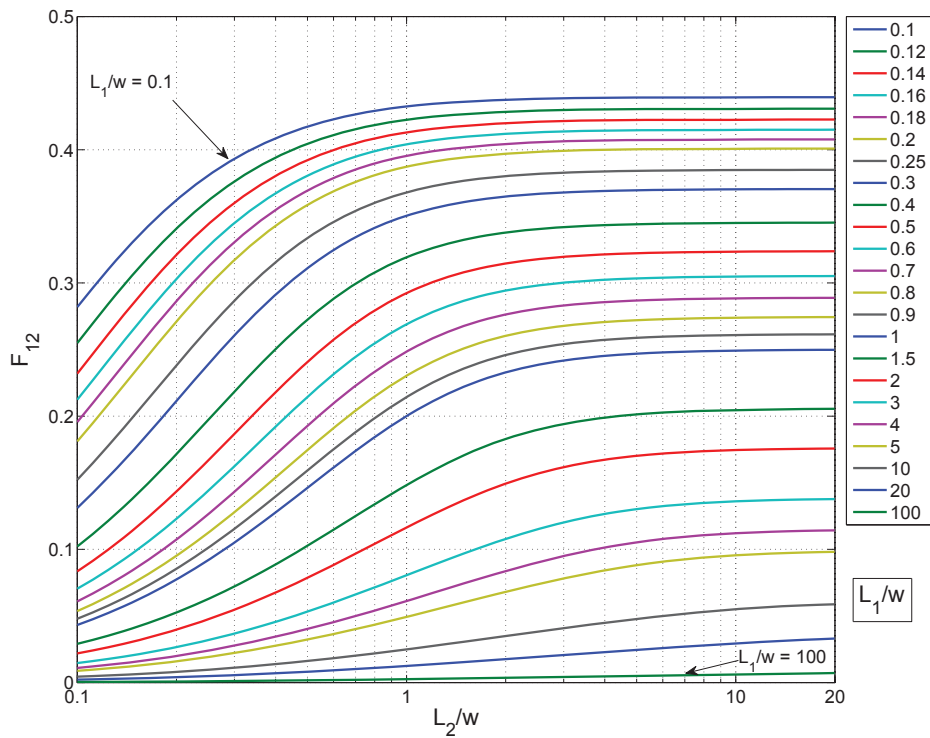


FIGURE 5.5 – Facteur de forme de deux plans perpendiculaires [8]; Dimensions $L_1 \times w$ et $L_2 \times w$

Bibliographie

- [1] J. F. Sacadura. *Initiation aux transferts thermiques*, volume 1. Editions Technique & Documentation, 1st edition, 1980.
- [2] Kirchhoff G. On the relation between the radiating and absorbing powers of different bodies for light and heat. *Annalen der Physik*, 109 :275–301, 1860.
- [3] R. Siegel and J. R. Howell. *Thermal Radiation Heat Transfer*, volume 1. Taylor & Francis, 4th edition, 2002.
- [4] Kohei Mizuno, Juntaro Ishii, Hideo Kishida, Yuhei Hayamizu, Satoshi Yasuda, Don N. Futaba, Motoo Yumura, and Kenji Hata. A black body absorber from vertically aligned single-walled carbon nanotubes. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(15) :6044–6047, 2009.
- [5] M. Planck. *The Theory of Heat Radiation*, volume 1. P. Blakiston’s Son & Co, 2nd edition, 1914.
- [6] S.L. Chang and K.T. Rhee. Blackbody radiation functions. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 11(6) :451–455, 1984.
- [7] M. F. Modest. *Radiative Heat Transfer*, volume 1. Academic Press, 3rd edition, 2013.
- [8] J.R. Howell and P. Menguc. Radiative transfer configuration factor catalog : A listing of relations for common geometries. *J. Quant. Spec. Rad. Transf.*, 112(5) :910–912, 2011.
- [9] R. Siegel and J. R. Howell. *Thermal Radiation Heat Transfer*. Taylor and Francis, 1992. Third Edition.
- [10] D. Lemonnier. Méthodes de Monte Carlo et des ordonnées discrètes. In *Cours de l’école de printemps*, Parent (Puy de Dôme), 8-15 juin 1996.
- [11] B. T. Wong and M. P. Mengüç. Comparison of Monte Carlo techniques to predict the propagation of a collimated beam in participating media. 42(2) :119–140, 2002.